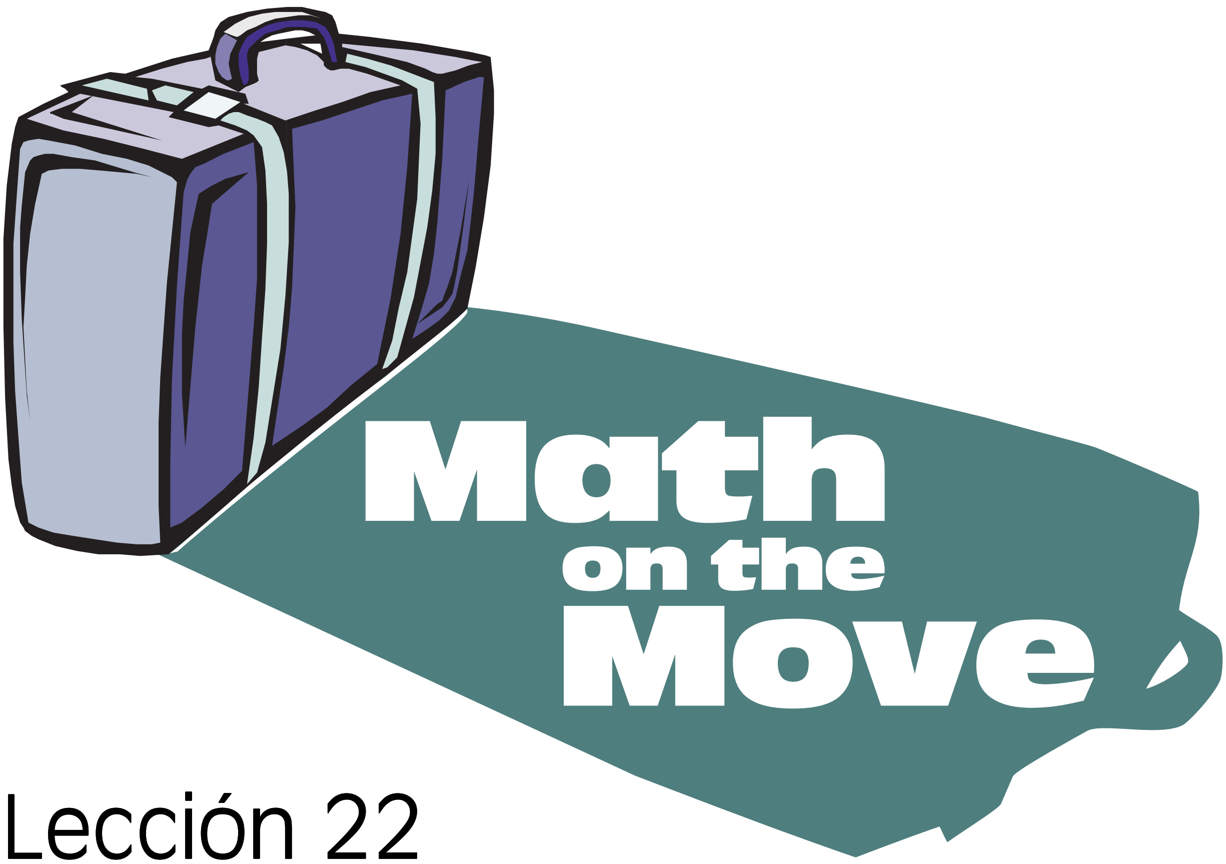
Nombre del estudiante: ______________________ Fecha: ______________________	Nombre de la persona de contacto: ______________________ Número de teléfono: ______________________



Lección 22

Sólidos tri-dimensionales

Objetivos

- Clasificar los sólidos tri-dimensionales
- Determinar el Volumen de los sólidos tri-dimensionales

Autores:

Jason March, B.A.
Tim Wilson, B.A.

Traductores:

Felisa Brea
Hugo Castillo

Editor:

Linda Shanks

Gráficos/Gráficas:

Tim Wilson
Jason March
Eva McKendry

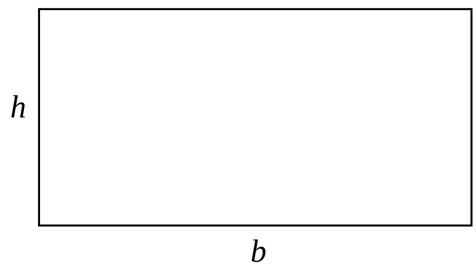
Como el sistema de medidas estándar es usado comúnmente en los Estados Unidos, esas unidades de medida (inches, feet, yards, miles, pounds, ounces, cups, pints, quarts, y gallons) han sido dejadas en inglés. Estas unidades de medida aparecen en mayor detalle en la lección 14.

Centro National PASS
Centro Migrante BOCES Geneseo
27 Lackawanna Avenue
Mount Morris, NY 14510
(585) 658-7960
(585) 658-7969 (fax)
www.migrant.net/pass

Preparado por el Centro PASS bajo los auspicios del Comité Coordinador Nacional de PASS con fondos del Centro de Servicios de Educación de la Región 20, San Antonio, Texas como parte del proyecto dei Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante (MAS) = Logros en Matemáticas Achievement = Success (MAS) - Además, del apoyo de proyecto del Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante de Oportunidades para el Éxito para los Jóvenes fuera–de-la-Escuela (OSY) bajo el liderazgo del Programa de Educación Migrante de Kansas.

Durante las últimas lecciones, hemos discutido diferentes tipos de figuras geométricas. Nuestra discusión se ha limitado a objetos de dos dimensiones (2-D). Sin embargo, vivimos en un mundo tri-dimensional (3-D). Ahora discutiremos objetos que existen en el mundo tri-dimensional.

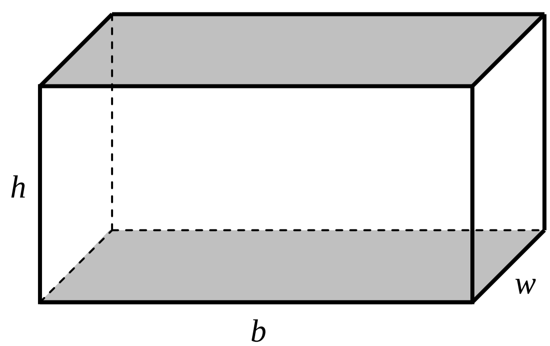
Por ejemplo, un rectángulo es un objeto bi-dimensional. Solamente tiene dos dimensiones – una base y una altura.



HECHO

- *b (base) puede representarse por l (longitud).*
- *En una figura 2-D, h (altura) se puede llamar w (ancho).*
- *En una figura 3-D, w (ancho) podría ser d (profundidad).*

Pero, ¿qué pasa si agregamos una tercera dimensión al rectángulo?



Aquí tenemos un objeto formado de tres dimensiones: base (*b*), altura (*h*), y ancho (*w*).
Esta forma se conoce como un **prisma rectangular**.

- Un **prisma rectangular** es un sólido tri-dimensional. Tiene dos bases paralelas que son rectángulos congruentes. En la figura, las bases están en color gris.

Esto difícilmente se puede ver en el papel así que pensemos en ejemplos de sólidos en la vida real.

- Una caja de zapatos
- Un libro de texto
- Un refrigerador

HECHO

Los objetos 3-D se conocen como sólidos.

El mundo entero está formado de sólidos tri-dimensionales. Existen otros sólidos diferentes a los prismas rectangulares. De hecho, un **prisma** puede definir muchos tipos de sólidos.

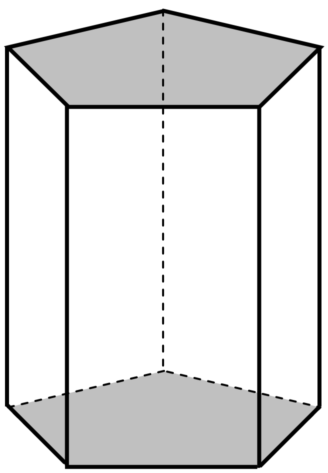
- Un **prisma** es una figura sólida. Tiene dos bases paralelas que son <u>polígonos congruentes</u>.

Un prisma puede tener bases con forma de cualquier polígono.

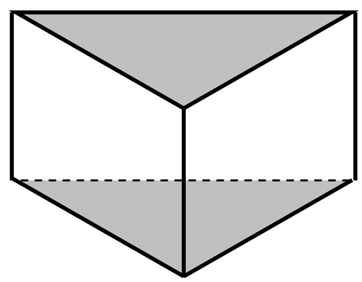
Ejemplo

Clasifica los siguientes prismas.

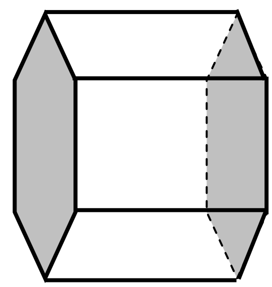
a)



b)



c)



Solución

Sabemos que todos éstos son prismas, necesitamos ver la base para determinar qué polígono es.

a) Las bases de este prisma están en color gris. Cada base tiene cinco vértices y lados, por tanto son pentágonos. Esto significa que el sólido es un prisma <u>pentagonal</u>.

b) Las bases de este prisma tienen tres vértices y lados. El polígono de tres lados es un triángulo, por tanto es un prisma <u>triangular</u>.

c) Las bases de este prisma tienen seis vértices y lados. El polígono de seis lados es un hexágono, por tanto es un prisma <u>hexagonal</u>.

Nota, cuando la base es un polígono de cinco lados o más, el nombre del prisma termina en "-al". Quitamos la "o" final y agregamos "-al" al nombre del polígono.

- Pentagonal, Hexagonal, Heptagonal, Octagonal, Nonagonal, Decagonal

Otra forma que tiene dos bases paralelas y congruentes es un **cilindro**. Sin embargo, un cilindro no se considera como un prisma.

- Un **cilindro** es un sólido con dos bases paralelas y congruentes que son círculos
    - El siguiente es un ejemplo de un cilindro

De nuevo, esto difícilmente se ve en el papel, así que pensemos en objetos que tienen forma de cilindro.

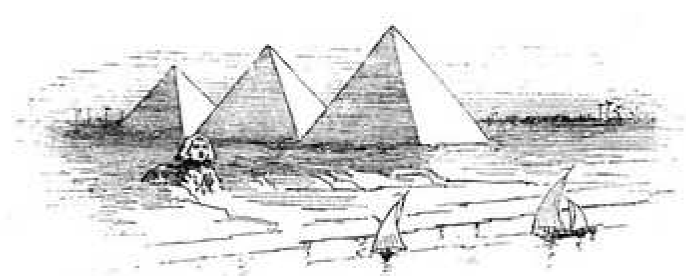
- <u>Una lata de frijoles</u>
- Un marcador
- Un tubo

Recuerda

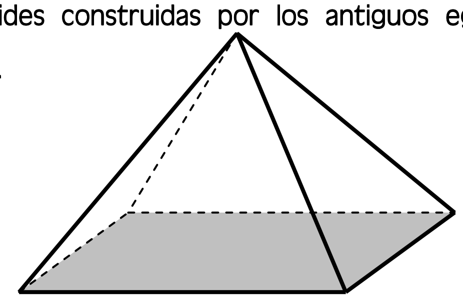
Un cilindro no es un prisma porque su base es un círculo, y un círculo no es un polígono.

Existen formas tri-dimensionales que tienen una sola base. Piensa en los antiguos egipcios y las tumbas que construyeron para sus Faraones. La forma de la tumba se conoce más comúnmente como una **pirámide**.

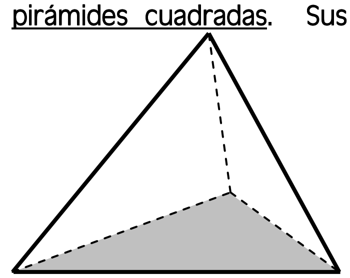
- Una **pirámide** es un sólido 3-D. Su base es un polígono, y sus lados son triángulos que convergen en un punto común.



Las pirámides construidas por los antiguos egipcios son <u>pirámides cuadradas</u>. Sus bases son cuadradas.



Pirámide Cuadrada

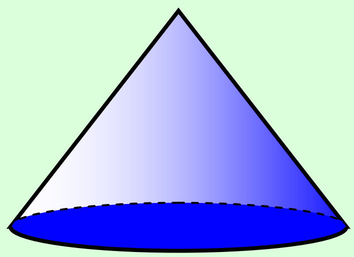


Pirámide Triangular

La mayoría de las pirámides tienen una base cuadrada o triangular. Podrían tener otra forma de base.

Una forma similar a una pirámide es un **cono**.

- Un **cono** es un sólido con una base circular y un vértice.
    - El siguiente es un ejemplo de un cono.

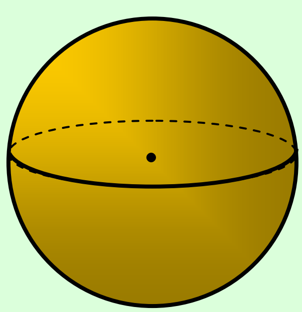


Un cono es una forma familiar que vemos por todos lados. Algunos ejemplos de cono son:

- Un cono de señalamiento de tráfico
- Un megáfono
- Un cono de helado

La última forma 3-D que necesitamos discutir no tiene base. Esta forma se conoce como una **esfera**.

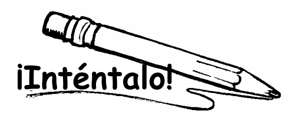
- Una **esfera** es un sólido tri-dimensional que es perfectamente redondo. Cada punto de una esfera está a la misma distancia del centro de la esfera.
    - El siguiente es un ejemplo de una esfera.



La esfera es la forma más difícil de apreciar en el papel. Algunos ejemplos del mundo real incluyen:

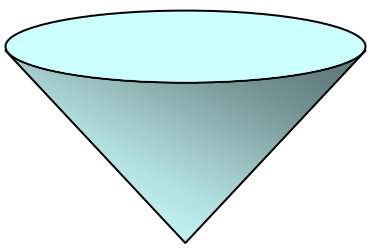
- Un balón de fútbol
- Un globo terráqueo (del planeta)
- Una bola de béisbol
- Una naranja

Ahora que ya hemos discutido todos los sólidos básicos. ¡Intenta clasificar algunos tú mismo!

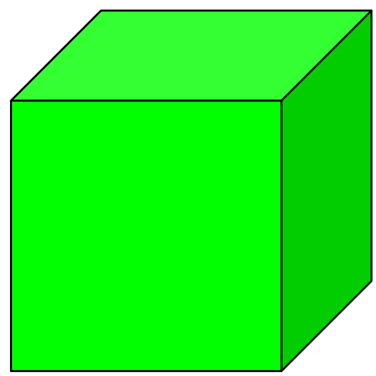


1. Clasifica las siguientes figuras de sólidos.

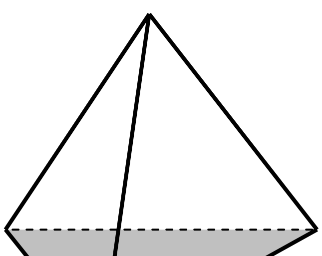
a)



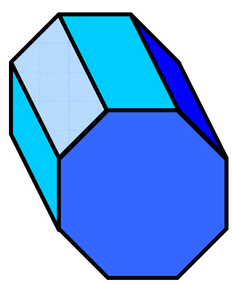
b)



c)

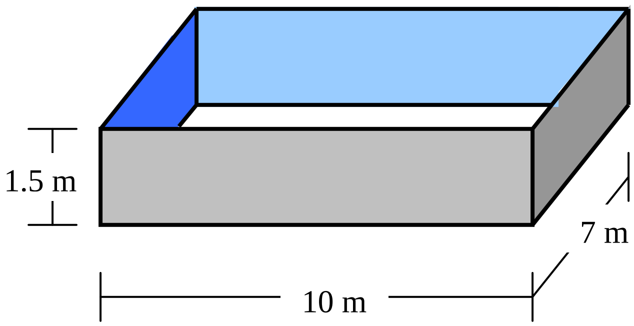


d)



Ahora que ya sabemos sobre sólidos 3-D, podremos resolver problemas utilizándolos.

Tu amiga, Daniela, acaba de terminar de construir una alberca rectangular. Ella quiere saber cuánta agua necesita para llenarla. Ella sabe que $1\ \text{kL} = 1\ \text{m}^3$, pero no sabe cuántos metros cúbicos hay en su alberca.



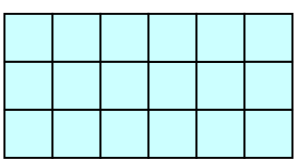
Daniela te muestra una figura de su alberca. Puedes ayudarla a averiguar cuánta agua necesita. Su alberca es un prisma rectangular. Para ver cuánta agua necesita, debes saber el **volumen** del prisma rectangular.

HECHO

Un metro cúbico es una medida de volumen. Un kilolitro es una medida de capacidad. Volumen es la cantidad de espacio que ocupa un sólido. Capacidad es la cantidad que un objeto puede alojar. Así si $1\ \text{kL} = 1\ \text{m}^3$*, luego* 1 kL *ocupa* $1\ \text{m}^3$ *de espacio. A esto se debe que Daniela necesitara* kL *de agua, y no* m^3 *de agua, para llenar su alberca.*

- **Volumen** es la cantidad de espacio que ocupa un sólido. El volumen se mide en unidades cúbicas.

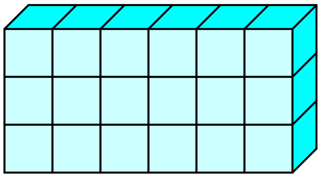
El volumen es muy similar al área. Cuando querías encontrar el área de los rectángulos, sumabas unidades cuadradas.



Este rectángulo tiene un área de 18 square unidades. Inicialmente, sabíamos esto al contar todos los cuadrados.

Si queremos encontrar el volumen de un prisma rectangular, solo sumamos todos los **cubos**.

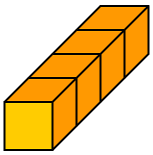
- Un **cubo** es un prisma rectangular con 6 caras cuadradas congruentes.
    - o Un dado estándar de seis lados es un ejemplo de un cubo

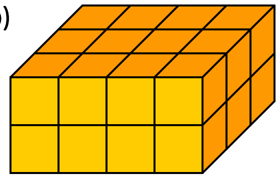


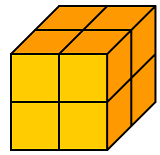
El volumen de este prisma rectangular es 18 unidades cúbicas, porque hay 18 cubos en total.

Ejemplo

Encuentra el volumen de los siguientes prismas rectangulares

a) 

b) 

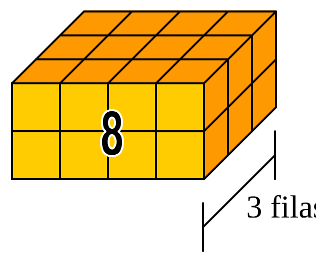
c) 

Solución

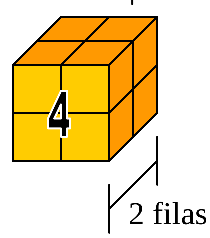
Para encontrar el volumen de los sólidos dados, simplemente sumamos todos los cubos.

a) Podemos ver todos los cubos de este prisma rectangular. Las dimensiones del prisma son 1 por 1 por 4. Hay 4 cubos en total en el prisma, así que el volumen es de 4 unidades cúbicas, o 4 unidades^3.

b) En este prisma, no podemos ver todos los cubos. Tenemos que imaginar cuántos cubos hay utilizando el razonamiento. La cara frontal del prisma tiene 8 cubos. Podemos ver que hay 3 filas con 8 cubos en cada una. Podemos asumir que hay $3 \times 8 = 24$ cubos. Esto significa que el volumen es de 24 unidades cúbicas, o 24 unidades^3.



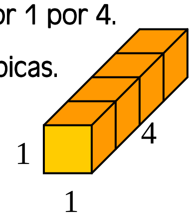
c) En este prisma, no podemos ver todos los cubos. Podemos ver que la cara frontal del prisma tiene 4 cubos. El prisma también tiene 2 filas con 4 cubos. Podemos asumir que hay $2 \times 4 = 8$ cubos. Esto significa que el volumen es de 8 unidades cúbicas, u 8 unidades^3.



Recuerda que con los rectángulos, podemos multiplicar las dimensiones para encontrar el área. ¿Qué notas en relación con las dimensiones del prisma rectangular y el volumen?

En el ejemplo "a," las dimensiones son 1 por 1 por 4.

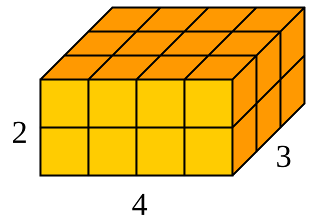
El volumen es $1 \times 1 \times 4 = 4$ unidades cúbicas.



En el ejemplo "b," las dimensiones son 2 por 4 por 3.

El volumen es

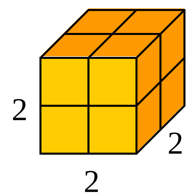
$2 \times 4 \times 3 = 24$ unidades cúbicas.



> ***Recuerda***
>
> *Recuerda que con los rectángulos, las dimensiones eran base por altura. Con los prismas rectangulares, son longitud por ancho por altura.*

En el ejemplo "c," las dimensiones son 2 por 2 por 2.

El volumen es $2 \times 2 \times 2 = 8$ unidades cúbicas.



Los ejemplos nos muestran que el volumen se encuentra multiplicando las tres dimensiones del prisma.

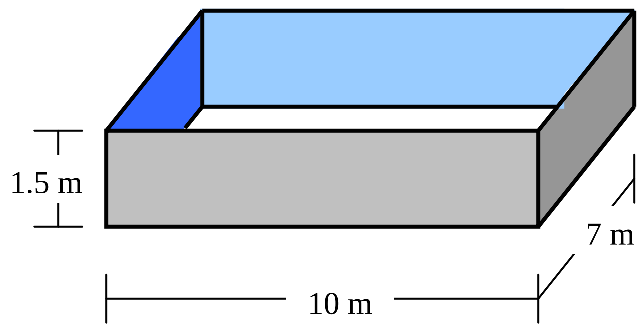
La fórmula del volumen de un prisma rectangular es

$$V = l \times w \times h$$

$$\text{Volumen} = \text{longitud} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

> **HECHO** *Las tres dimensiones pueden tener diferentes nombres. Utilizamos longitud, ancho, y altura como un estándar para la fórmula.*

Regresemos al problema de la alberca de Daniela. Ella nos dio las dimensiones de la alberca.



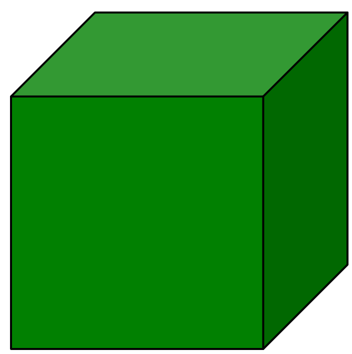
Así, para encontrar el volumen de la alberca, simplemente multiplicamos las tres dimensiones.

$$V = 1.5 \times 10 \times 7 = 105 \text{ m}^3$$

Si $1 \text{ kL} = 1 \text{ m}^3$, Daniela necesita 105 kL de agua para llenar la alberca.

Ejemplo

Encuentra el volumen del siguiente cubo.



Solución

Para encontrar el volumen del cubo, necesitamos conocer sus tres dimensiones. Si un cubo está hecho de cuadrados congruentes, la longitud de todas sus aristas es la misma. Así, las tres dimensiones de este cubo son 3 por 3 por 3. El volumen es $3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ in.}^3$ (pulg.³)

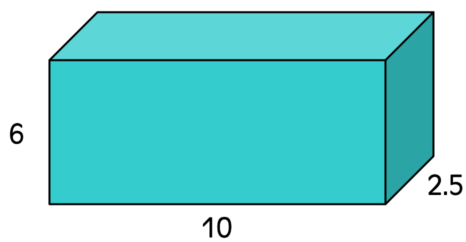
HECHO

Nota que multiplicamos la arista por sí misma tres veces. Recuerda que la multiplicación repetida es lo mismo que utilizar un exponente. Así, la fórmula del volumen de un cubo es $(\text{la longitud de una arista})^3$. *El término "cúbico" viene del volumen de un cubo.*

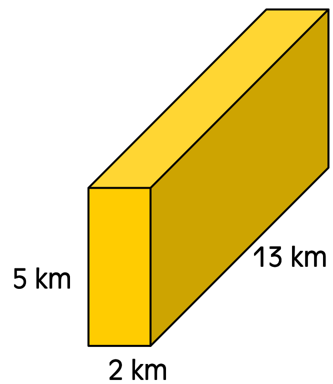
¡Inténtalo!

2. Encuentra el volumen de los siguientes prismas rectangulares.

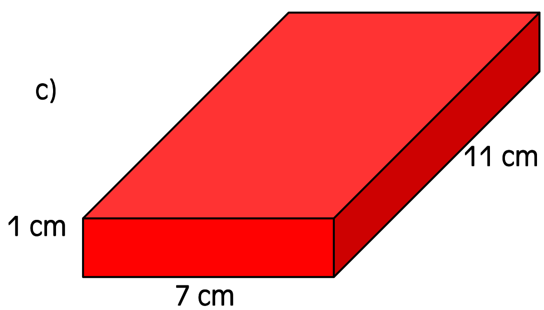
a)



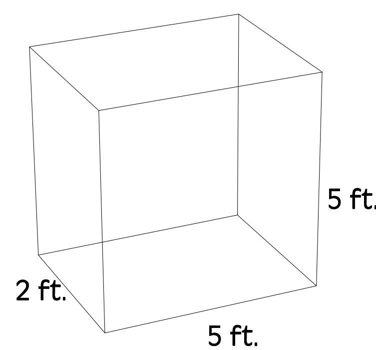
b)



c)



d)

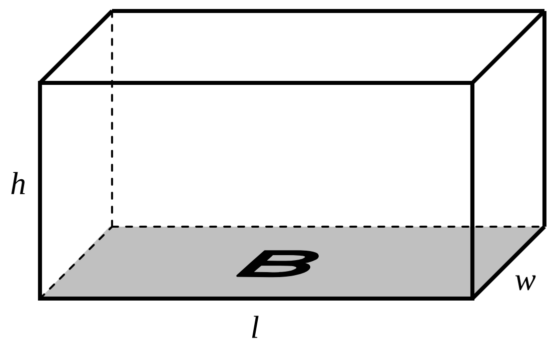


El volumen de un prisma rectangular se encuentra multiplicando sus tres dimensiones. Sin embargo, hay otra fórmula que utilizamos para todos los prismas.

$$V = B \times h$$

Donde <u>*B* es el área de la base del prisma</u> y *h* es la altura. Cuando buscábamos el volumen de prismas rectangulares, simplemente descomponíamos el área de la base en la longitud y el ancho.

> ***Recuerda***
>
> *$A = bh$ no es lo mismo que $V = Bh$. Utilizamos la letra minúscula "b" cuando describimos la longitud de la base. Utilizamos la letra mayúscula "B" cuando describimos el área de la base.*



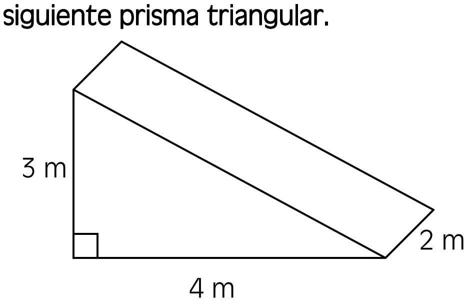
El área de la base de este prisma rectangular es $l \times w$. Esto significa que el volumen del prisma rectangular es.

$$
\begin{aligned}
V &= B \times h \\
&= l \times w \times h
\end{aligned}
$$

Ahora que lo sabemos, utilizaremos esta fórmula para encontrar el volumen de los prismas triangulares.

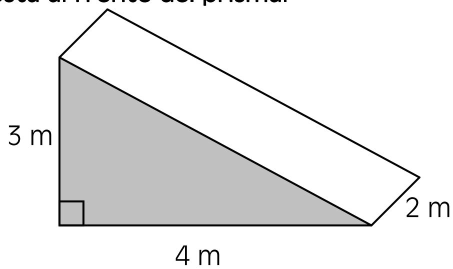
Ejemplo

Encuentra el volumen del siguiente prisma triangular.



Solución

Primero, debemos encontrar la base del prisma. Ya que es un prisma triangular, la base es el triángulo recto que está al frente del prisma.



Luego, necesitamos encontrar el área del triángulo frontal.

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}bh \\
&= \frac{1}{2}(4)(3) \\
B &= 6\ \text{m}^2
\end{aligned}
$$

> ***Recuerda***
>
> *La fórmula del área de un triángulo es* $A = \frac{1}{2}bh$.

Ahora que tenemos el área de la base, podemos sustituir, o insertarla en la fórmula para encontrar el volumen del prisma.

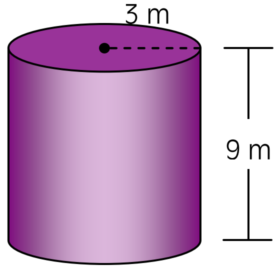
$$
\begin{aligned}
V &= Bh \\
&= 6(2) \\
V &= 12\ \text{m}^3
\end{aligned}
$$

Ten cuidado cuando insertes los valores en la fórmula. Utilizamos 2 como el valor de la altura del prisma, porque ya utilizamos 3 y 4 para encontrar el área de la base, *B*.

Aún cuando el cilindro no es un prisma, podemos utilizar la misma fórmula para encontrar su volumen. Esto funciona porque, como en un prisma, un cilindro tiene dos bases congruentes.

Ejemplo

Encuentra el volumen del siguiente cilindro. (Aproxima tu respuesta a centésimas)



Solución

Para encontrar el volumen del cilindro, debemos utilizar la fórmula del volumen.

$$V = Bh$$

Un cilindro tiene dos bases circulares, así para encontrar el área de la base, *B*, necesitamos encontrar el área del círculo. El círculo tiene un radio de 3 metros. Insertamos ese valor en la fórmula del área de un círculo.

$$\begin{aligned} B &= \pi r^2 \\ &= \pi(3)^2 \\ B &= 9\pi \end{aligned}$$

Recuerda

La fórmula del área de un círculo es $A = \pi r^2$.

Utilizaremos 3.14 como valor de pi.

$$\begin{aligned} B &= 9\pi \\ &\approx 9(3.14) \\ B &\approx 28.26 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Ahora que tenemos el área de la base, *B*, podemos insertar ese valor en la fórmula del volumen.

$$\begin{aligned} V &= Bh \\ &\approx (28.26)(9) \\ V &\approx 254.34 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

De esta manera, el volumen del cilindro es aproximadamente 254.34 m^3.

Recuerda, si 3.14 es un valor aproximado de pi, cualquier respuesta tendrá un valor aproximado.

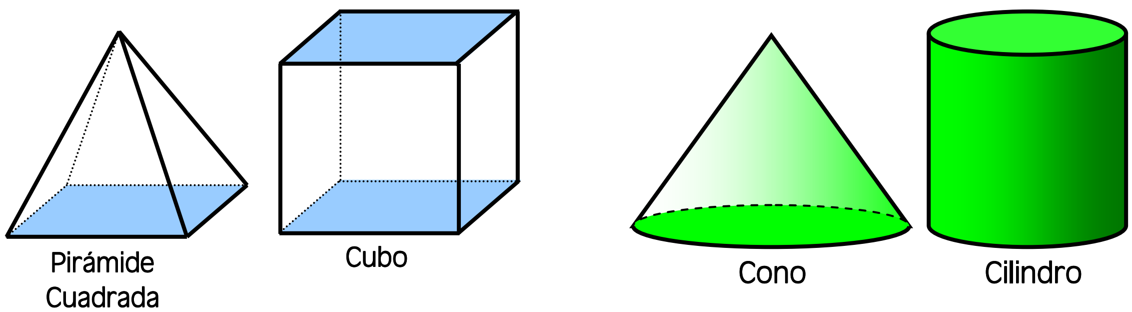
HECHO

Si buscamos la longitud de un objeto, la respuesta está en unidades (ft., in., m, km, etc.).

Si buscamos el área de un objeto, la respuesta está en unidades cuadradas ($ft.^2, in.^2, m^2, km^2$ *).*

Si buscamos el volumen de un objeto, la respuesta está en unidades cúbicas ($ft.^3, in.^3, m^3, km^3$ *).*

Finalmente, necesitamos determinar el volumen de los sólidos con una base. Cuando encontramos el área de triángulos 2-D, los comparábamos con paralelogramos y encontramos que su área era $\frac{1}{2}$ de un paralelogramo. Utilizaremos un método similar para encontrar el volumen de pirámides 3-D y de los conos. Una pirámide cuadrada es similar a un cubo porque ambos tienen una base cuadrada. Sin embargo, la pirámide solamente tiene una base, mientras que el cubo tiene dos.



Debido a que estamos trabajando con sólidos tri-dimensionales, el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del cubo. El volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro. La pirámide y el cubo, así como el cono y el cilindro, comparten las siguientes dimensiones: la base, *B*, y la altura, *h*.

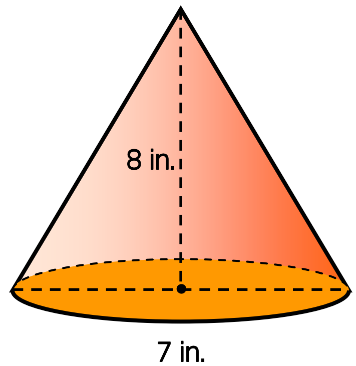
En una pirámide y un cono, la altura es la línea perpendicular desde la base hasta el vértice donde se encuentran todas sus aristas, como se muestra arriba. Así, la fórmula del volumen para una pirámide (y un cono) es

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

Donde *B* representa el área de la base, y *h* representa la altura.

Ejemplo

Encuentra el volumen del siguiente cono. (Aproxima tu respuesta a las décimas)



Solución

Para encontrar el volumen del cono, debemos utilizar la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh$. *B* representa el área de la base circular. Primero, encontremos *B*. Tenemos el diámetro de la base circular, pero la fórmula del área de un círculo requiere del radio. Si el radio es la mitad del diámetro, entonces el radio del círculo es $7 \times \frac{1}{2} = 3.5$. Con este valor podremos encontrar el área de la base, *B*.

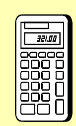
$$\begin{aligned} B &= \pi r^2 \\ &= \pi (3.5)^2 \\ &= 12.25\pi \end{aligned}$$

Utilizaremos 3.14 como el valor de pi.

$$\begin{aligned} B &= 12.25\pi \\ &\approx 12.25(3.14) \\ B &\approx 38.465 \text{ in.}^2 \end{aligned}$$

Luego, insertamos este valor en la fórmula del volumen.

Tip de Calculadora



Para elevar al cuadrado números difíciles, introduce el número en la calculadora y presiona la tecla al cuadrado.

x^2

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}Bh \\
&\approx \frac{1}{3}(38.465)(8) \\
&\approx 102.57333 \text{ in.}^3
\end{aligned}
$$

El problema nos pedía aproximar a las décimas, así el volumen del cono es

$$V \approx 102.6 \text{ in.}^3$$

Recuerda

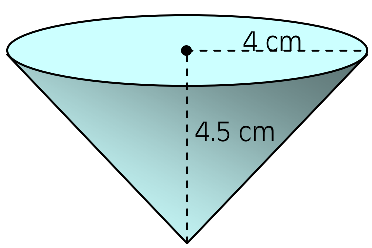
Para aproximar un número, fíjate en el número a la derecha del sitio al que tenemos que ajustarnos. Compara ese número con 5.

Intenta resolver los siguientes problemas sobre áreas tú mismo.

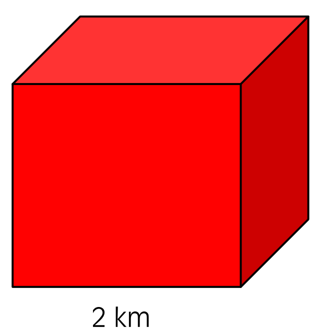
¡Inténtalo!

3. Encuentra el volumen de los siguientes sólidos.
(Aproxima al número entero más cercano)

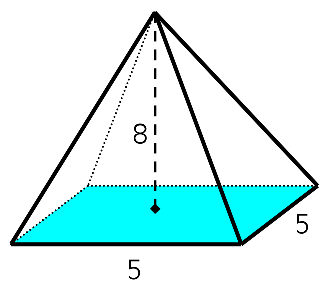
a) Cono



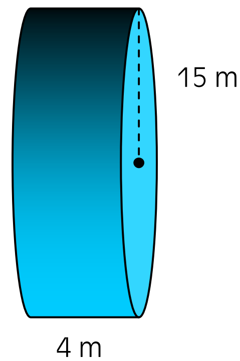
b) Cubo



c) Pirámide Cuadrada



d) Cilindro



Repaso

1. Marca las siguientes definiciones:
    a. prisma rectangular
    b. prisma
    c. cilindro
    d. pirámide
    e. cono
    f. esfera
    g. volumen
    h. cubo

2. Resalta todas las fórmulas de volumen de la lección.

3. Resalta todos los cuadros "Hecho".

4. Resalta todos los cuadros "Recuerda".

5. Escribe una pregunta que te gustaría hacerle a tu instructor, o algo nuevo que hayas aprendido en esta lección.

____

____

____

____

Problemas de práctica

Math On the Move Lección 22

Instrucciones: Escribe las respuestas en la libreta de matemáticas. Titula este ejercicio Math On the Move – Lección 22, Conjuntos A y B

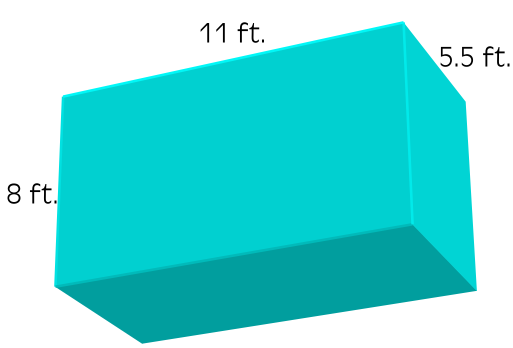
Conjunto A

1. ¿Cuáles dos tipos de sólidos tienen dos bases?

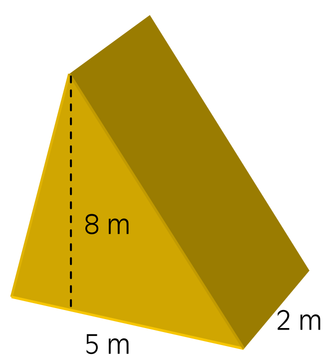
2. ¿Qué sabes acerca de las dimensiones de un cubo?

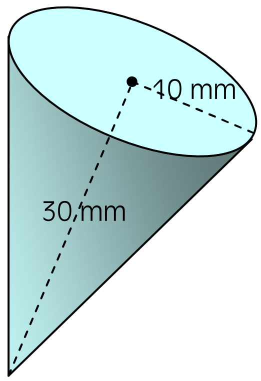
3. Encuentra el volumen de los siguientes sólidos.

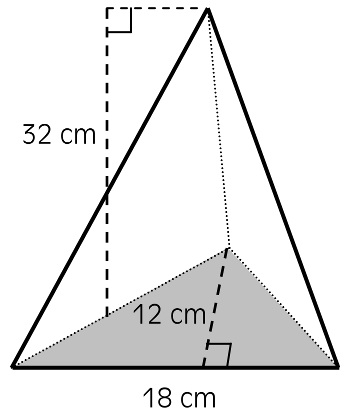
a)



b)



c) 

d) 

Conjunto B

1. Dibuja el sólido descrito.

   a) Un cilindro b) Una pirámide con base cuadrada c) Un cono

2. ¿Cuál es el único sólido que no tiene base?
3. Si un cubo tiene un volumen de 64, ¿cuál es la longitud de una de sus aristas?

Respuestas a Inténtalo

1. a) Cono b) Prisma rectangular (Cubo) c) Pirámide triangular d) Prisma octagonal

2. a) 150 unidades^3 b) 130 km^3 c) 77 cm^3 d) 50 ft.^3

3. a)
$$B = \pi(4^2)$$
$$= \pi(16)$$
$$\approx (3.14)(16)$$
$$B \approx 50.24 \text{ cm}^2$$
$$V \approx \frac{1}{3}(50.24)(4.5)$$
$$V \approx 75.36$$
$$V \approx 75 \text{ cm}^3$$

   b) $V = 2^3$ $V = 8 \text{ km}^3$

c) $B = 5 \times 5$ $\qquad V = \frac{1}{3}(25)(8)$ $\qquad V \approx 67 \text{ unidades}^3$

$B = 25 \text{ unidades}^2$ $\qquad V = 66.\overline{6}$

d) $B = \pi(15^2)$ $\qquad V \approx (706.5)(4)$ $\qquad V \approx 2826 \text{ m}^3$

$= \pi(225)$

$\approx (3.14)(225)$

$B \approx 706.5 \text{ m}^2$

Fin de la lección 22