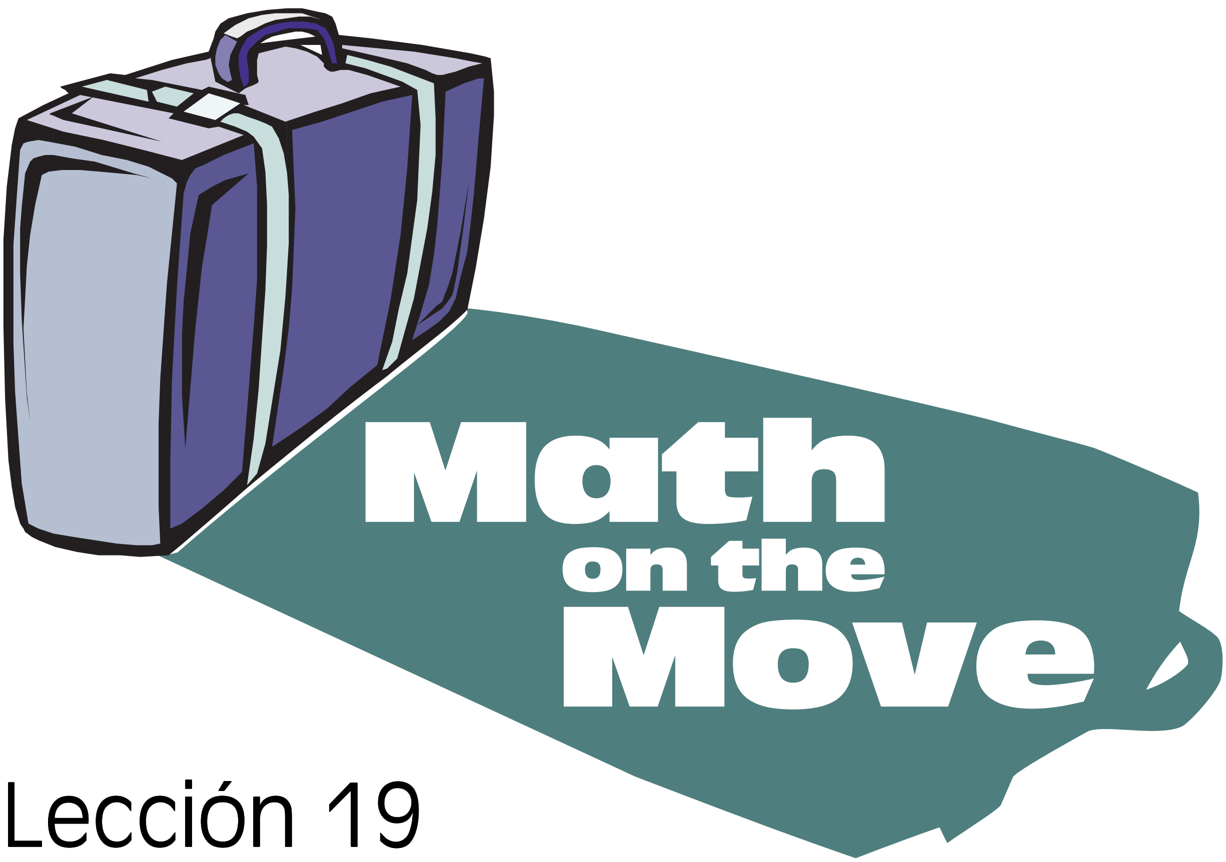
Nombre del estudiante: ______________________	Nombre de la persona de contacto: ______________________
Fecha: ______________________	Número de teléfono: ______________



Lección 19

Propiedades de un Triángulo

Objetivos

- Entender la definición de un triángulo
- Distinguir entre los diferentes tipos de triángulo
- Utilizar el Teorema de Pitágoras para encontrar el lado no conocido de un triángulo recto

Autores:

Jason March, B.A.
Tim Wilson, B.A.

Traductores:

Felisa Brea
Hugo Castillo

Editor:

Linda Shanks

Gráficos/Gráficas:

Tim Wilson
Jason March
Eva McKendry

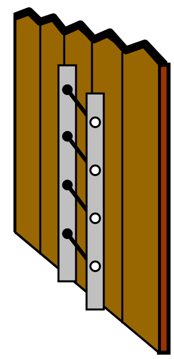
Como el sistema de medidas estándar es usado comúnmente en los Estados Unidos, esas unidades de medida (inches, feet, yards, miles, pounds, ounces, cups, pints, quarts, y gallons) han sido dejadas en inglés. Estas unidades de medida aparecen en mayor detalle en la lección 14.

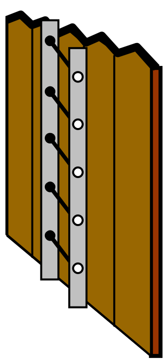
Centro National PASS
Centro Migrante BOCES Geneseo
27 Lackawanna Avenue
Mount Morris, NY 14510
(585) 658-7960
(585) 658-7969 (fax)
www.migrant.net/pass

Preparado por el Centro PASS bajo los auspicios del Comité Coordinador Nacional de PASS con fondos del Centro de Servicios de Educación de la Región 20, San Antonio, Texas como parte del proyecto dei Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante (MAS) = Logros en Matemáticas Achievement = Success (MAS) - Además, del apoyo de proyecto del Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante de Oportunidades para el Éxito para los Jóvenes fuera–de-la-Escuela (OSY) bajo el liderazgo del Programa de Educación Migrante de Kansas.

Un buen día, te encuentras jugando fútbol en el patio trasero con tu amigo, Julio. Tú crees que puedes patear la bola más lejos que él, así que lo retas a una competencia. Julio acepta tu reto y pide patear primero. Julio se prepara y patea la bola tan lejos que ésta pasa por arriba de la cerca que separa tu patio del patio del vecino. Julio te dice, "No te preocupes. Traeré una escalera para subir la barda y recobrar el balón. Todo lo que necesito es una escalera que sea más alta que la cerca." Le preguntas a Julio por qué la escalera debe ser más alta que la cerca, y él te empieza a explicar.

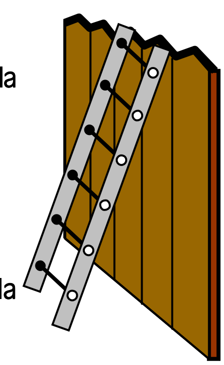
"Si empleo una escalera más corta que la cerca, no será suficientemente alta para que pueda pasar sobre la cerca."





"Si empleo una escalera que es de la misma altura que la cerca, se recargará tanto en la misma que no será estable."

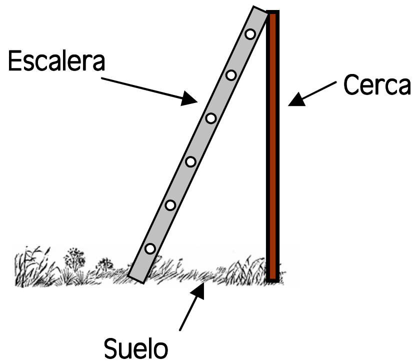
"Tengo que utilizar una escalera que sea más larga que la cerca, así podré recargarla en la misma formando un ángulo."



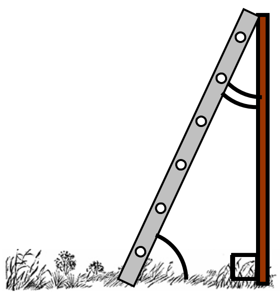
Julio continúa explicando, "Si te fijas en la forma en que la escalera se recarga en la cerca, verás que está formando un **triángulo**."

- Un **triángulo** es un polígono con tres lados y tres ángulos. El <u>prefijo</u> "tri-" significa tres. Por tanto, un <u>triángulo</u> está formado de tres ángulos.
  - Los siguientes son ejemplos de triángulos.

Veamos una vista lateral de la escalera en la cerca.



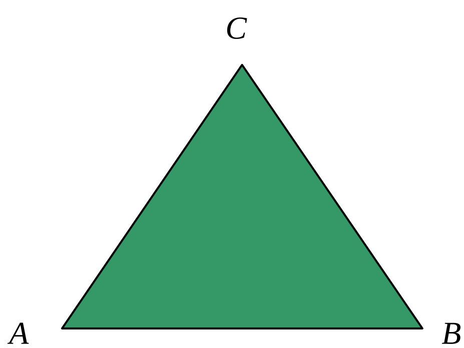
En el grabado, podemos ver que la escalera recargada contra la escalera está formando un triángulo. Los tres lados son el suelo, la cerca, y la escalera.



Este triángulo también tiene tres ángulos. Los tres ángulos se forman entre la escalera y la cerca, la cerca y el suelo, y el suelo y la escalera. Cuando evaluamos problemas matemáticos, asumimos que las cercas y los muros siempre se construyen perpendiculares al suelo. Así, utilizamos el símbolo del cuadrito para mostrar el ángulo recto que se forma entre la cerca y el suelo.

El triángulo es el polígono más básico, con el menor número de lados. Es imposible formar un polígono de tan solo dos lados. Nombramos un triángulo por cada uno de sus vértices.

El siguiente triángulo es ΔABC. Utilizamos el símbolo Δ para representar un triángulo.



ΔABC tiene tres lados: $\overline{AB}, \overline{BC},$ y $\overline{AC}$

ΔABC tiene tres ángulos: $\angle A, \angle B,$ y $\angle C$

ΔABC tiene tres vértices: A, B, y C

Recuerda

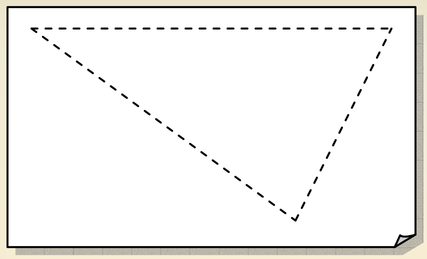
La palabra "vértice" se utilizó para los ángulos. "Vértice" se emplea en los polígonos para nombrar los puntos donde se encuentran sus lados formando ángulos. El vértice es un rincón. "Vértices" es la palabra que utilizamos para más de un "vértice".

Los triángulos tienen algunas propiedades especiales.

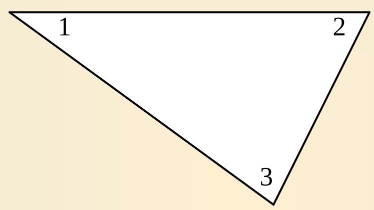
La suma de los ángulos en un triángulo es de $180°$.

¡Averígualo tú mismo!

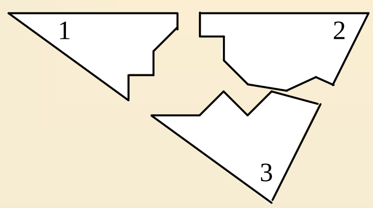
Paso 1: Consigue una hoja de papel en blanco. Utiliza una escuadra y dibuja un triángulo en esa hoja de papel.



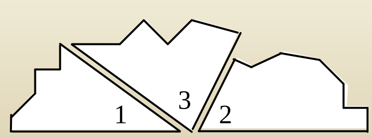
Paso 2: Recorta tu triángulo, y numera cada vértice con un 1, 2, y 3.



Paso 3: Recorta o arranca las tres esquinas del triángulo.



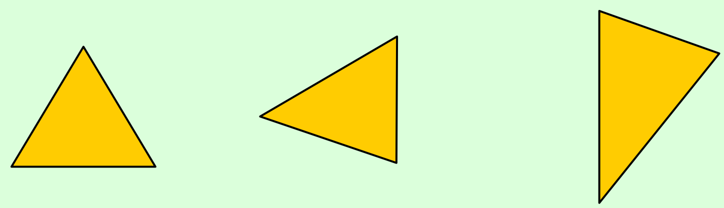
Paso 4: Alinea los tres ángulos con sus números apuntando al medio.



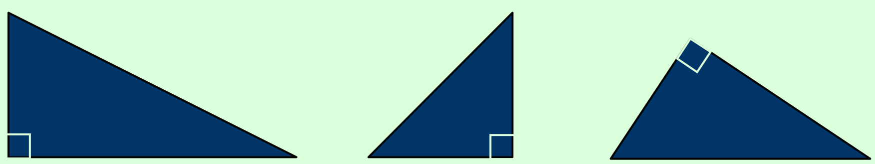
¿Qué notas en la forma en que se alinean los tres ángulos?

La suma de los ángulos es 180° en todo triángulo. Los triángulos se pueden clasificar según el tipo de ángulos que tienen. Existen tres tipos de triángulos definidos por sus ángulos: **triángulo agudo**, **triángulo recto**, y **triángulo obtuso**.

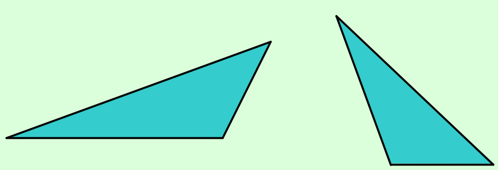
- Un **triángulo agudo** es un triángulo donde cada ángulo es un ángulo agudo. Cada ángulo es <u>menor de</u> 90°.
  - Los siguientes son ejemplos de triángulos agudos.



- Un **triángulo recto** es un triángulo que tiene *un* ángulo recto. Un ángulo es <u>exactamente</u> 90°.
  - Los siguientes son ejemplos de triángulos rectos.



- Un **triángulo obtuso** es un triángulo con *un* ángulo obtuso. Un ángulo está <u>entre</u> 90° y 180°.
  - Los siguientes son ejemplos de triángulos obtusos.

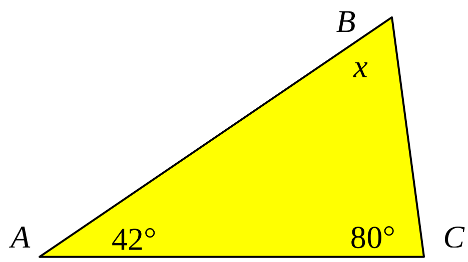


HECHO

Los triángulos rectos solo pueden tener un ángulo recto. Si pudiesen tener más de uno, la suma de los ángulos sería mayor de 180°. *Lo mismo se aplica para los triángulos obtusos.*

Ejemplo

Encuentra el ángulo desconocido en el triángulo, y define el triángulo como agudo, recto, u obtuso.



Solución

La suma de los ángulos en cada triángulo es de $180°$. Los dos ángulos que tenemos son de $42°$ y $80°$. Sabemos que $(m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°)$, así

$$42° + 80° + x = 180°$$

Ahora podemos resolver este problema como una ecuación algebraica. Primero, combina términos similares.

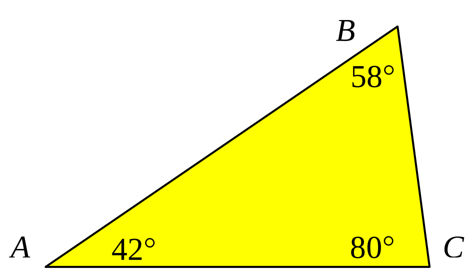
$$42° + 80° + x = 180°$$
$$122° + x = 180°$$

Ahora queremos encontrar el valor de la variable.

$$\begin{array}{rcl} 122° + x & = & 180° \\ \underline{-122} & & \underline{-122} \end{array}$$

$$x = 58°$$

Así, el valor del ángulo desconocido es $58°$.

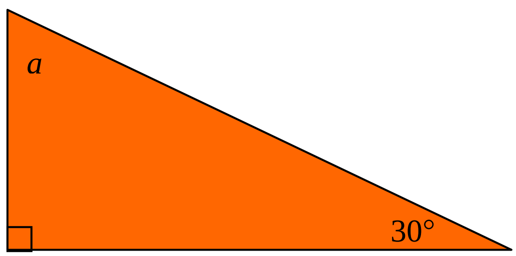


Cada ángulo es menor de $90°$, así ΔABC es un triángulo agudo.

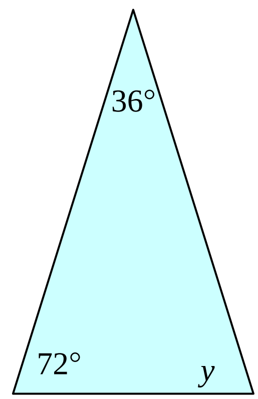
Practiquemos un poco por nuestra cuenta.

1. Encuentra la medida del ángulo desconocido en los ángulos siguientes. Luego, clasifica los triángulos como agudo, recto, u obtuso.

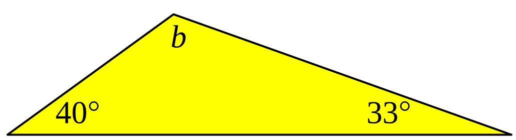
a)



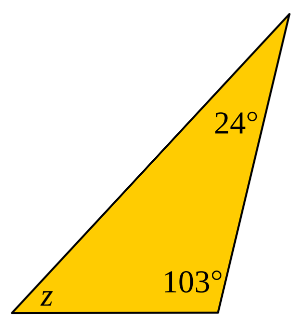
b)



c)



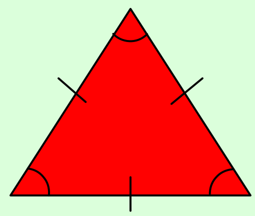
d)



¡Excelente! Ahora necesitamos clasificar los triángulos por la longitud de sus lados. Existen tres formas de clasificar un triángulo por la longitud de sus lados: **equilátero**, **isósceles**, y **escaleno**.

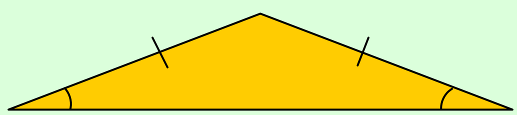
- Un **triángulo equilátero** es un triángulo con <u>todos los lados</u> de la misma medida. Nota que suena como si la palabra "igual" estuviese dentro de la palabra equilátero.
    - o Todos los ángulos de un triángulo equilátero tienen la misma medida.

El siguiente es un ejemplo de un triángulo equilátero.



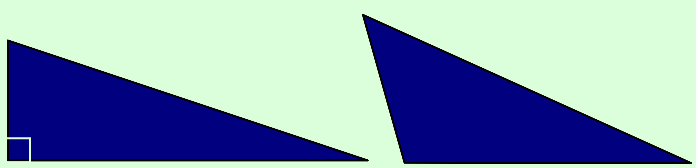
- Un **triángulo isósceles** es un triángulo con <u>dos lados</u> de la misma longitud. Recuerda que los trapezoides isósceles tienen dos lados de la misma longitud.
    - o Dos de los ángulos en un triángulo isósceles tienen la misma medida.

El siguiente es un ejemplo de un triángulo isósceles.



- Un **triángulo escaleno** es un triángulo cuyos lados tienen diferentes medidas. Cualquier triángulo que no sea equilátero o isósceles es un triángulo escaleno.

Los siguientes son ejemplos de triángulos escalenos.



Nota que un triángulo es escaleno y contiene un ángulo recto. Un triángulo se puede definir por sus lados, así como por sus ángulos.

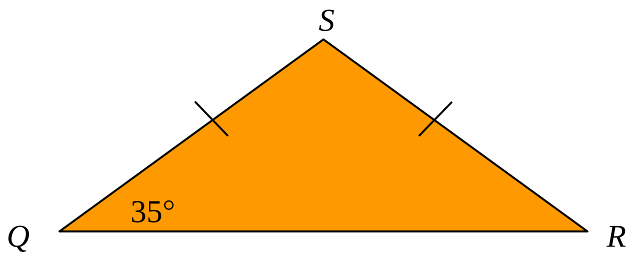
HECHO

Todos los tres ángulos de un triángulo equilátero tienen la misma medida. Si los ángulos suman $180°$ y cada ángulo es de la misma medida, entonces cada ángulo debe ser $180° \div 3 = 60°$.

En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados de igual longitud son congruentes.

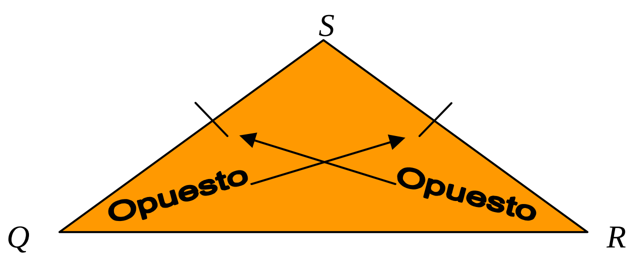
Ejemplo

Encuentra los ángulos desconocidos, y clasifica el triángulo en tantas maneras como sea posible.

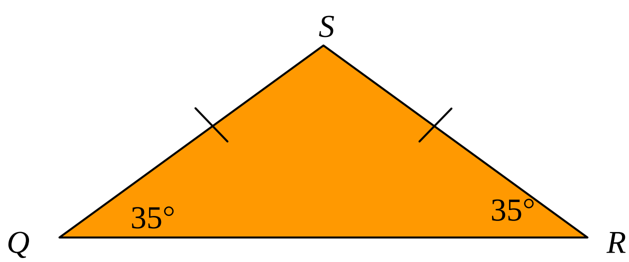


Solución

Lo primero que sabemos es que ΔQRS es un triángulo isósceles porque dos lados son de la misma medida. Debemos aprovechar el hecho de que los ángulos opuestos a los lados de igual longitud son congruentes.

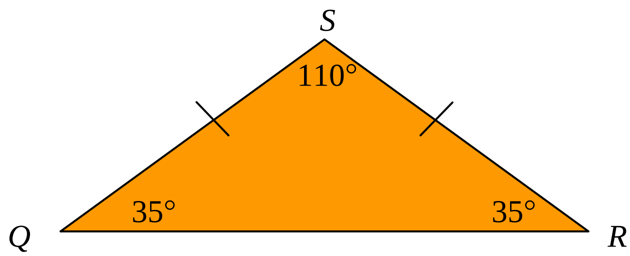


Así, sabemos que $\angle Q \cong \angle R$ lo que significa que $m\angle Q = m\angle R = 35°$



Para tener el último ángulo, aprovechamos el hecho de que $m\angle Q + m\angle R + m\angle S = 180°$.

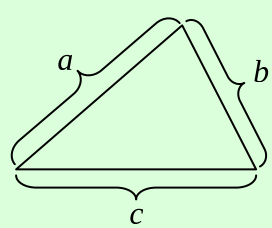
$$
\begin{aligned}
35^\circ + 35^\circ + m\measuredangle S &= 180^\circ \\
70^\circ + m\measuredangle S &= 180^\circ \\
-70^\circ \qquad\qquad\quad & \quad -70^\circ \\
\hline
m\measuredangle S &= 110^\circ
\end{aligned}
$$



ΔQRS es un triángulo isósceles, obtuso con $m\measuredangle Q = m\measuredangle R = 35^\circ$, y $m\measuredangle S = 110^\circ$.

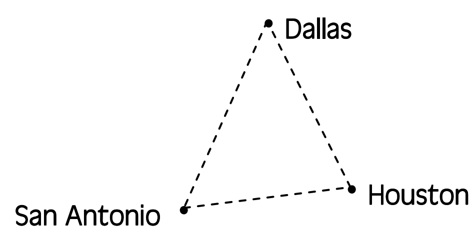
Otra cosa interesante acerca de los triángulos es la **desigualdad del triángulo**.

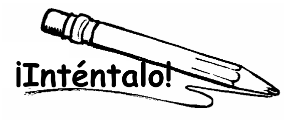
- La **desigualdad del triángulo** establece que la suma de las longitudes de cualesquier dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado. Más específicamente, la suma de los dos lados más cortos es mayor que el lado más largo.



$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

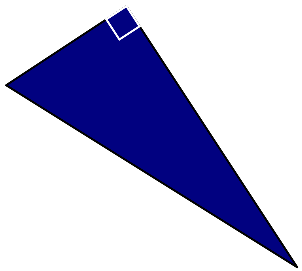
Piensa en la desigualdad del triángulo de esta manera: supón que queremos viajar entre tres ciudades (Houston, Dallas, y San Antonio). La distancia más corta entre dos ciudades es una trayectoria recta entre ellas. Así, es más corto viajar directamente entre San Antonio y Houston que ir primero de San Antonio a Dallas y luego de Dallas a Houston.



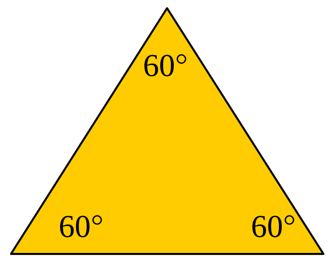


2. Clasifica los siguientes triángulos según sus ángulos y sus lados.

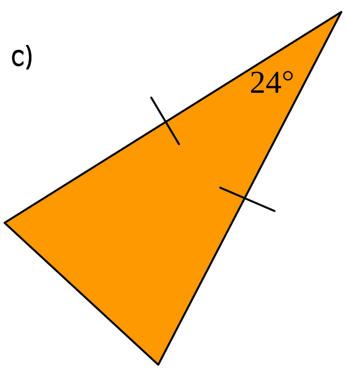
a)



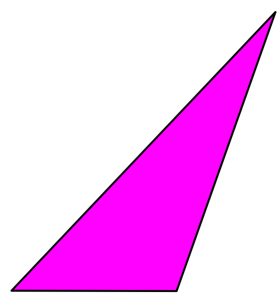
b)



c)

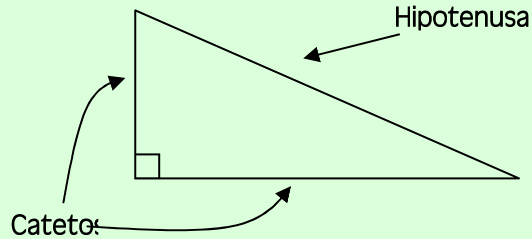


d)



Ahora que hemos discutido todos los tipos de triángulos, nos enfocaremos en las propiedades especiales de los triángulos rectos. Todo triángulo tiene tres lados, pero los triángulos rectos tienen nombres especiales para sus tres lados. Los dos lados más cortos se denominan **catetos**, y el lado más largo se denomina **hipotenusa**.

- Los **catetos** de un triángulo recto son los lados adyacentes al ángulo recto.
- La **hipotenusa** de un triángulo recto es el lado opuesto al ángulo recto. Es el lado más largo del triángulo.



HECHO

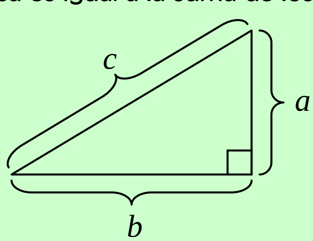
Utilizamos la palabra adyacente para hablar de los objetos que están próximos uno al otro. Lados que son adyacentes a un ángulo son los lados que se encuentran para formar ese ángulo.

HECHO

El lado más largo de un triángulo siempre está opuesto al ángulo más grande. El ángulo más grande de un triángulo recto es el ángulo recto. Así, el lado más largo de un triángulo recto es la hipotenusa.

Una propiedad importante de los triángulos rectos es el **Teorema de Pitágoras.**

- El **Teorema de Pitágoras** establece lo siguiente: En un triángulo recto, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos,



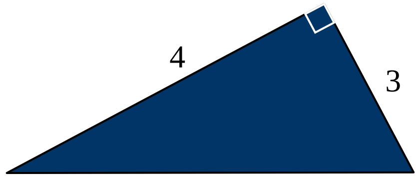
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Donde *a* y *b* representan los catetos del triángulo, y *c* representa la hipotenusa.

Utilicemos este teorema en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Encuentra la longitud de la hipotenusa del siguiente triángulo.



Solución

Se nos da un triángulo recto y las longitudes de ambos catetos. Utilizaremos el Teorema de Pitágoras $\left(a^2 + b^2 = c^2\right)$ para encontrar el tercer lado del triángulo. Ya que conocemos los dos catetos, conocemos los valores de *a* y de *b*.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$3^2 + 4^2 = c^2$$
$$9 + 16 = c^2$$
$$25 = c^2$$

La fórmula nos da la longitud de la hipotenusa al cuadrado $\left(c^2\right)$. Sin embargo, queremos *c,* no c^2. Necesitamos calcular la **raíz cuadrada** de ambos lados.

- La **raíz cuadrada** de un número es cualquier número que, cuando se multiplica por sí mismo, te da el número original.
    - Justo como la resta es la operación inversa de la suma y la división es el inverso de la multiplicación, los exponentes tienen una operación inversa. El inverso de elevar un número al cuadrado (elevación de un número a la segunda potencia) es calcular la raíz cuadrada de un número. El símbolo de una raíz cuadrada es $\sqrt{}$

$7 \times 7 = 7^2 = 49$	$10 \times 10 = 10^2 = 100$	$x \cdot x = x^2$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{x^2} = x$

Obtenemos la ecuación $25 = c^2$. Cuando resolvemos una ecuación, cualquier operación que desarrollamos de un lado del signo igual, debe desarrollarse también del otro lado del signo igual.

$$\sqrt{25} = \sqrt{c^2}$$
$$5 = c$$

La longitud de la hipotenusa, entonces, es igual a 5.

Este problema se resolvió fácilmente porque nuestra respuesta fue un número entero. Si no sabías que $\sqrt{25} = 5$, deberías familiarizarte con la lista de los cuadrados perfectos.

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{196} = 14$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{225} = 15$

HECHO

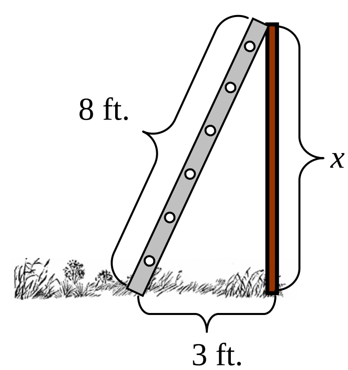
Un cuadrado perfecto es un número entero cuya raíz cuadrada es un número entero.

Resolvamos uno más juntos.

Ejemplo

Tu amigo Julio y tú, saltaron con éxito la cerca utilizando la escalera. Luego te das cuenta que utilizaste una escalera de 8 feet (pies) de largo. La distancia a que colocaste la base de la escalera de la cerca es de 3 feet. ¿Qué tan alta era la cerca?

(Aproxima tu respuesta a las décimas)



Solución

Para resolver este problema, recuerda que éste es un triángulo recto. El ángulo recto está formado por la cerca y el suelo, entonces la hipotenusa es la escalera. Conocemos la medida de los dos lados del triángulo recto, entonces podemos utilizar el Teorema de Pitágoras. Un cateto mide 3 ft.; la hipotenusa, *c*, es 8 ft.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 3^2 + b^2 &= 8^2 \\ 9 + b^2 &= 64 \\ -9 \qquad &\quad -9 \\ \hline b^2 &= 55 \end{aligned}$$

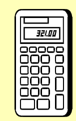
Como podemos ver, necesitamos obtener la raíz cuadrada de ambos lados. Pero espera, ¡55 no es un cuadrado perfecto! Necesitamos utilizar una calculadora para poder resolver este problema.

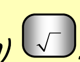
$$\sqrt{b^2} = \sqrt{55}$$
$$b = 7.4161985$$

La pregunta también te pide aproximar a las décimas.

$$b \approx 7.4$$

Tip de Calculadora



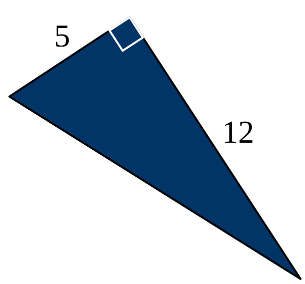
Para encontrar la raíz cuadrada de un número, introduce el número en la calculadora, luego presiona square root button (la tecla de raíz cuadrada) .

La última cosa que tenemos que hacer es nombrar las unidades. La escalera y el suelo se midieron en feet, luego la cerca es 7.4 feet de alto.

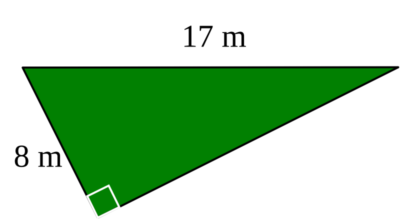
Intenta resolver estos problemas tú mismo.

3. Identifica los catetos y la hipotenusa de los triángulos. Luego encuentra el lado desconocido del triángulo. (Aproxima tu respuesta a las centésimas cuando sea necesario.)

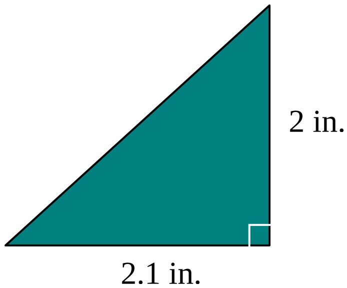
a)



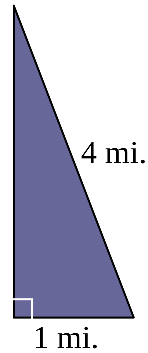
b)



c)



d)



☑ Repaso

1. Marca las siguientes definiciones:
    a. triángulo
    b. triángulo agudo
    c. triángulo recto
    d. triángulo obtuso
    e. triángulo equilátero
    f. triángulo isósceles
    g. triángulo escaleno
    h. desigualdad del triángulo
    i. catetos
    j. hipotenusa
    k. Teorema de Pitágoras
    l. raíz cuadrada

2. Marca los cuadros "Hecho".

3. Escribe una pregunta que te gustaría hacerle a tu instructor, o algo nuevo que hayas aprendido en esta lección.

Problemas de práctica

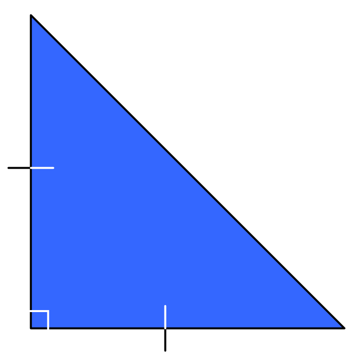
Math On the Move Lección 19

Instrucciones: Escribe las respuestas en la libreta de matemáticas. Titula este ejercicio Math On the Move – Lección 19, Conjuntos A y B

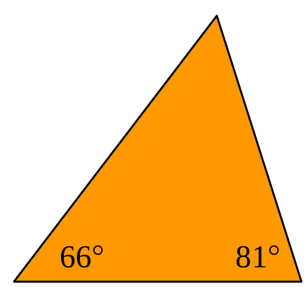
Conjunto A

1. Encuentra el(los) ángulo(s) desconocido(s) y clasifica el triángulo en tantas formas como sea posible.

   a)

   b)

2. Establece si las siguientes medidas de ángulos pueden formar un triángulo. Si es así, especifica el tipo de triángulo.

   a) $36°, 60°, 70°$ b) $4°, 106°, 70°$ c) $50°, 50°, 90°$

   d) $30°, 60°, 90°$ e) $112°, 34°, 34°$ f) $90°, 89°, 1°$

Conjunto B

1. Tú puedes crear un triángulo isósceles recto. ¿Puedes crear un triángulo equilátero recto? ¿Por qué si o por qué no?

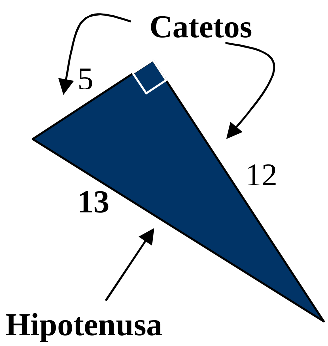
2. *Cierto o Falso*: En un triángulo recto, los dos ángulos agudos son complementarios. ¿Cómo sabes?
3. Dominick está parada a 8000 ft. del aeropuerto local. Un avión hace círculos volando a 6000 ft. directamente arriba del aeropuerto. ¿Qué tan lejos está Dominick del avión? (*Pista*: Primero, dibuja un croquis. Luego, intenta resolver esto mentalmente. Imagina que las distancias son 8 ft. y 6 ft., y suma tres ceros a tu solución. (Verifica tu respuesta con una calculadora.)

Respuestas a Inténtalo

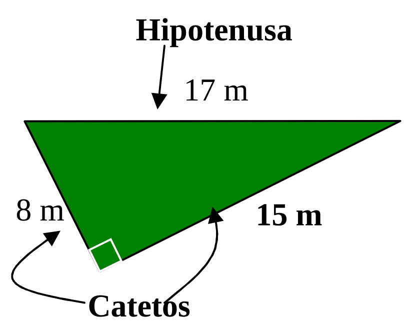
1. a) $60°$ triángulo recto — b) $72°$ triángulo agudo
   c) $107°$ triángulo obtuso — d) $53°$ triángulo obtuso

2. a) Recto, escaleno — b) Agudo, equilátero
   c) Agudo, isósceles — d) Obtuso, escaleno

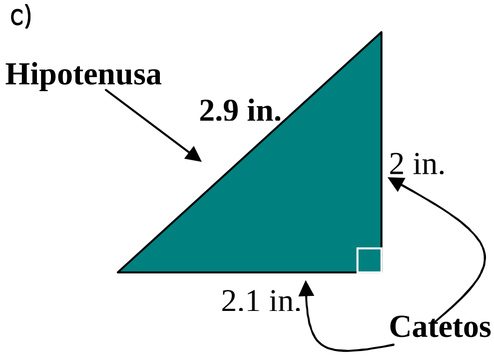
3. a)



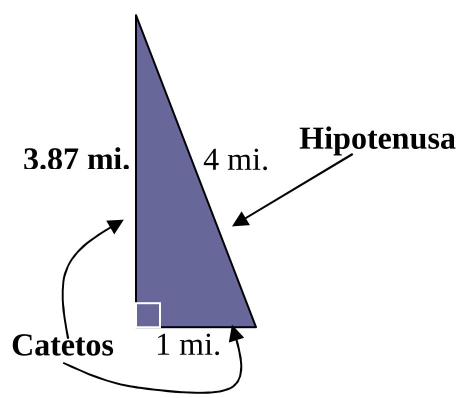
b)



c)



d)



NOTAS

Fin de la lección 19