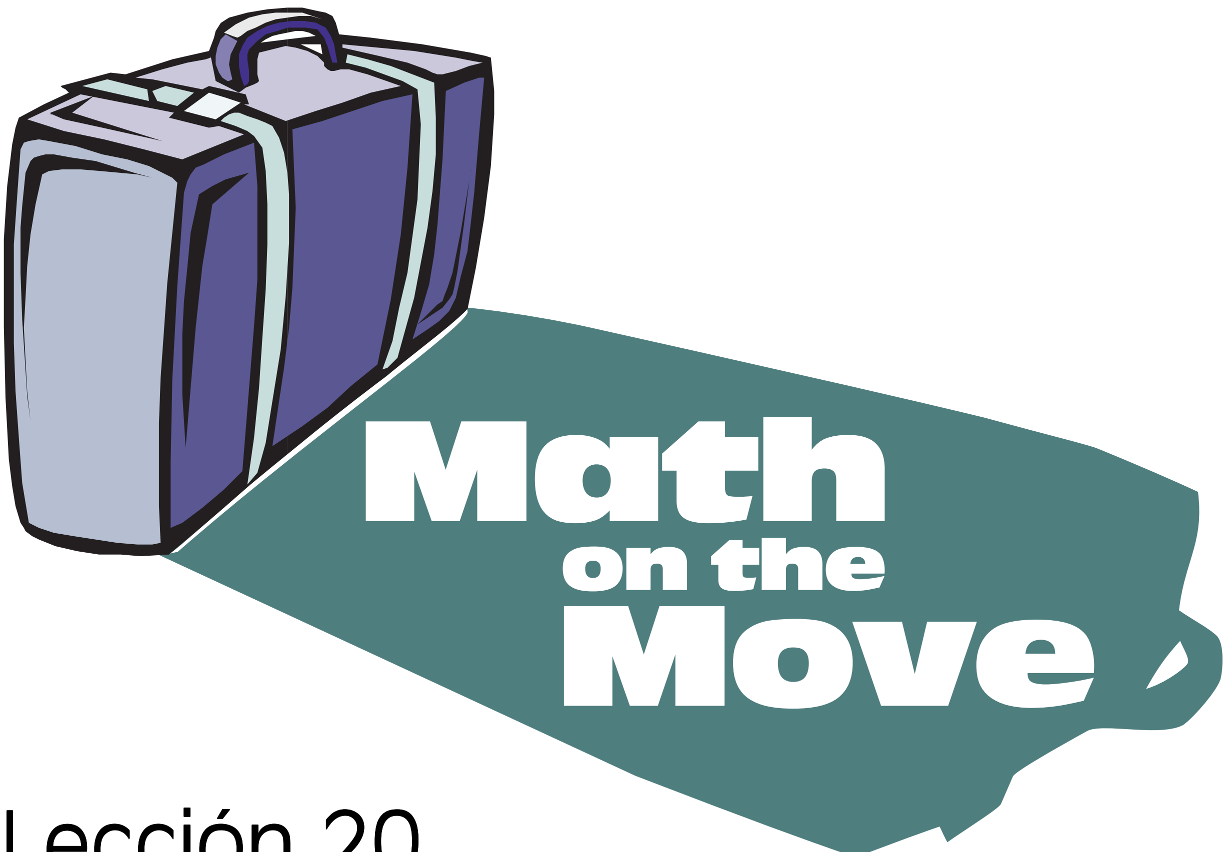
Nombre del estudiante: ______________________________

Fecha: ______________________________

Nombre de la persona de contacto ______________________________

Número de teléfono: ____________________



Lección 20

Perímetro, Área, y Similitud de Triángulos

Objetivos

- Determinar el perímetro de un triángulo utilizando algebra
- Encontrar el área de un triángulo utilizando la fórmula $A = (1/2)\,bh$
- Encontrar el lado de un triángulo utilizando las propiedades de proporcionalidad y de similitud de figuras

Autores:

Jason March, B.A.
Tim Wilson, B.A.

Traductores:

Felisa Brea
Hugo Castillo

Editor:

Linda Shanks

Gráficos/Gráficas:

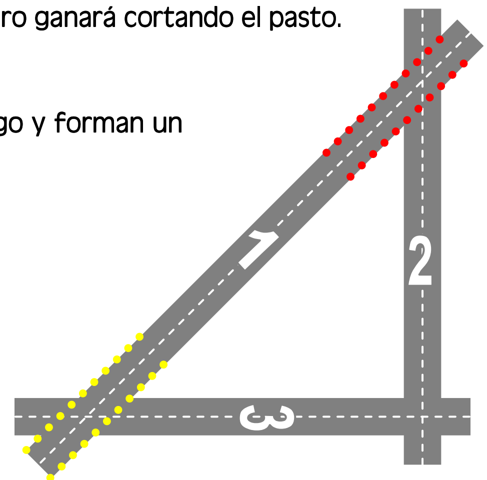
Tim Wilson
Jason March
Eva McKendry

Como el sistema de medidas estándar es usado comúnmente en los Estados Unidos, esas unidades de medida (inches, feet, yards, miles, pounds, ounces, cups, pints, quarts, y gallons) han sido dejadas en inglés. Estas unidades de medida aparecen en mayor detalle en la lección 14.

Centro National PASS
Centro Migrante BOCES Geneseo
27 Lackawanna Avenue
Mount Morris, NY 14510
(585) 658-7960
(585) 658-7969 (fax)
www.migrant.net/pass

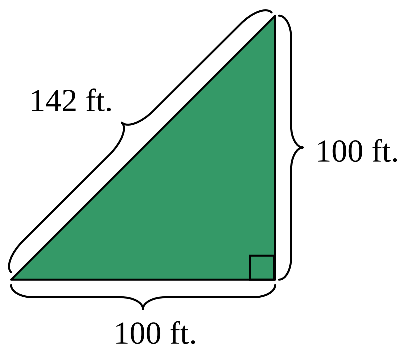
Preparado por el Centro PASS bajo los auspicios del Comité Coordinador Nacional de PASS con fondos del Centro de Servicios de Educación de la Región 20, San Antonio, Texas como parte del proyecto dei Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante (MAS) = Logros en Matemáticas Achievement = Success (MAS) - Además, del apoyo de proyecto del Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante de Oportunidades para el Éxito para los Jóvenes fuera–de-la-Escuela (OSY) bajo el liderazgo del Programa de Educación Migrante de Kansas.

Tu amigo, Jorge, se te acerca muy emocionado por su nuevo trabajo en el aeropuerto. Le preguntas qué es lo que hace ahí y te contesta, "corto el pasto que crece entre las pistas de aterrizaje." Tú le dices, "Eso suena laborioso. Tienes mucho pasto que cortar." Jorge contesta, "Gano diez centavos por cada pie cuadrado que corto." Tú exclamas, "¡Muy bien! ¿Cuántos pies cuadrados hay entre las pistas?" Él contesta, "No tengo idea. Las pistas forman un triángulo." Jorge te muestra un diagrama de las pistas. Entonces decides ayudarle a calcular cuánto dinero ganará cortando el pasto.



Jorge explica que las pistas 2 y 3 miden 100 feet (pies) de largo y forman un ángulo recto. La pista 1 es la más larga con 142 ft (pies).

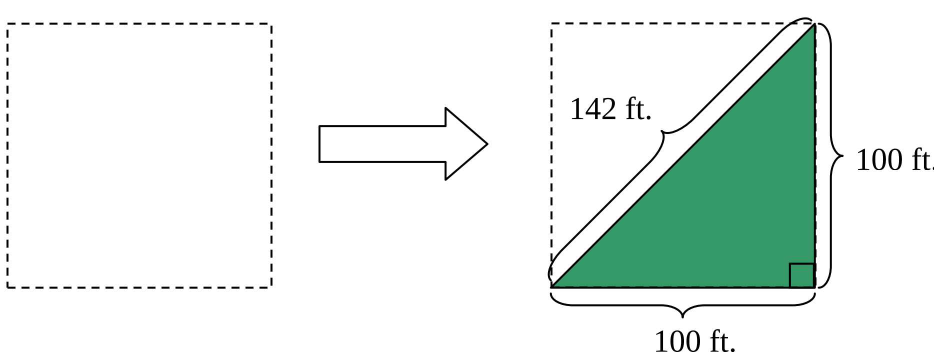
Haces un croquis utilizando la figura de un triángulo <u>recto</u>.



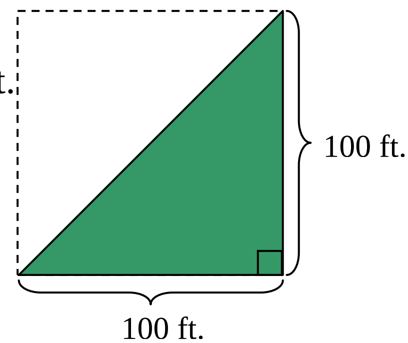
Recuerda

Un triángulo recto es un triángulo con un ángulo recto.

Las únicas fórmulas de área que has aprendido hasta ahora son para cuadriláteros y paralelogramos. Debes calcular el área utilizando estas figuras familiares. Observas que los dos lados de igual longitud forman un ángulo recto. Esto te recuerda un cuadrado, así que trazas un cuadrado y lo superpones al triángulo.



De esta manera ves que los dos lados del triángulo se alinean perfectamente con el cuadrado. También notarás que el lado más largo parece como que corta al cuadrado por la mitad. Podrás ver que el área del triángulo es una mitad del área del cuadrado.



El área del cuadrado es la base, *b*, por la altura, *h*.

$$\text{Área} = b \cdot h = (100\text{ ft.})(100\text{ ft.}) = 10{,}000\text{ sq. ft.}$$

Si el área del triángulo es una mitad de la anterior, entonces

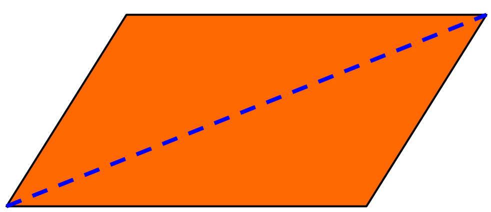
$$\text{Área del triángulo} = 5{,}000\text{ sq. ft.}$$

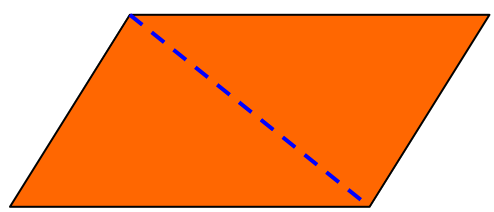
Así, Jorge ganará $5{,}000 \times \$0.10 = \$500.00$ por cortar el pasto.

Ya descubriste que el triángulo dado se ha conformado cortando un cuadrado a la mitad. De hecho, todos los triángulos pueden ser dibujados trazando la **diagonal** de un paralelogramo.

- La **diagonal** de un polígono es cualquier segmento de línea, que no sea uno de los lados, que conecta dos vértices.

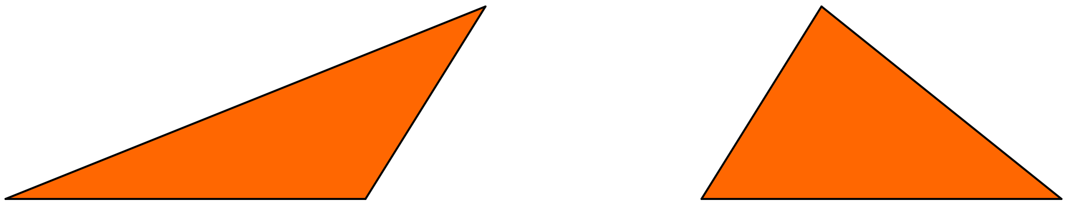
En el siguiente paralelogramo, se pueden dibujar dos diagonales.



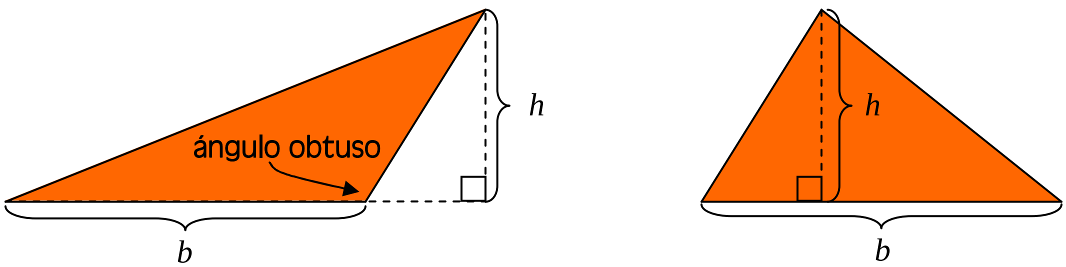


Cada diagonal corta al paralelogramo a la mitad, formando dos triángulos. Si la diagonal corta al paralelogramo a la mitad, el área de cada triángulo formado es la mitad del área del paralelogramo. Si la fórmula del área de un paralelogramo es $A = b \cdot h$, entonces el área de uno de los triángulos es

$$\text{Área de un Triángulo} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$



Estos son los dos triángulos formados por el paralelogramo. Tienen la misma área, porque son producto del corte del mismo paralelogramo a la mitad. Estos triángulos comparten la misma base y altura.

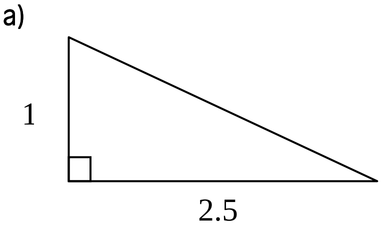


La altura del triángulo es el segmento de línea perpendicular trazado desde la base hasta el vértice opuesto a la base. Nota que la altura del triángulo de la izquierda se ha trazado fuera del triángulo. Para poder trazar la altura de un triángulo obtuso, debes prolongar la base como se muestra en la figura.

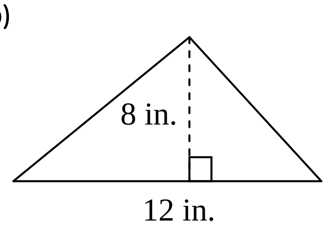
Ejemplo

Encuentra el área de los siguientes triángulos.

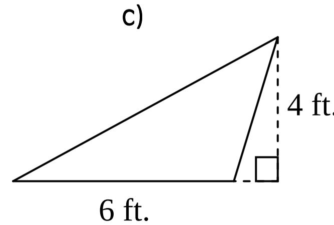
a)



b)



c)



Solución

Para resolver estos problemas, necesitamos recordar que la fórmula del área de un triángulo es

$$A = \frac{1}{2}bh$$

> ***Recuerda***
>
> *Cuando variables y números se expresan uno al lado del otro, significa que se multiplican.*

a) Éste es un triángulo recto con una base de 2.5 unidades y altura de 1 unidad. Por tanto el área es

$$A = \frac{1}{2}(2.5)(1) = 1.25 \text{ unidades cuadradas}.$$

No olvides incluir las unidades en tu respuesta.

> **HECHO**
>
> *unidades cuadradas = unidades*^{2}
>
> *square feet = feet*^{2}

b) En este triángulo, la base mide 12 in. y la altura mide 8 in. El área es

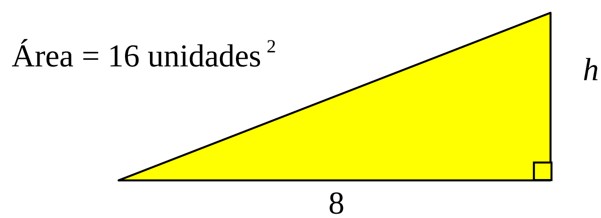
$$A = \frac{1}{2}(12)(8) = 48 \text{ square inches (pulgadas cuadradas)}$$

c) En el último triángulo, la base mide 6 ft. y la altura mide 4 ft. El área es

$$A = \frac{1}{2}(6)(4) = 12 \text{ square feet (pies cuadrados)}$$

Ejemplo

Encuentra la altura faltante en el triángulo.



Solución

Ya conocemos la longitud de la base, así como su área. Necesitamos encontrar la altura. Si recordamos nuestra fórmula del área de un triángulo,

$A = \frac{1}{2} \times b \times h$, si <u>sustituimos</u> las dimensiones conocidas, obtenemos,

$$16 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$$

Multiplica primero los números.

$$16 = 4 \times h$$

Divide para dejar sola la variable.

$$\frac{16}{4} = \frac{\cancel{4}h}{\cancel{4}}$$

$$4 = h$$

<u>*Verifica*</u>: $h = 4$

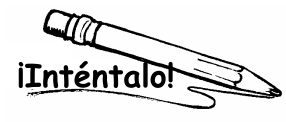
$$16 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$$

$$16 = \frac{1}{2} \times 8 \times (\ \ )$$

$$16 = \frac{1}{2} \times 8 \times (4)$$

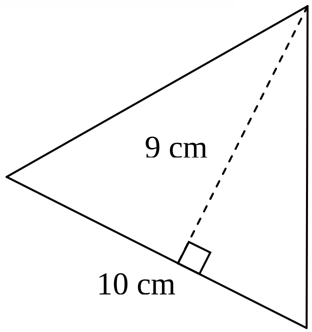
$$16 = \frac{1}{2} \times 32$$

$$16 = 16$$

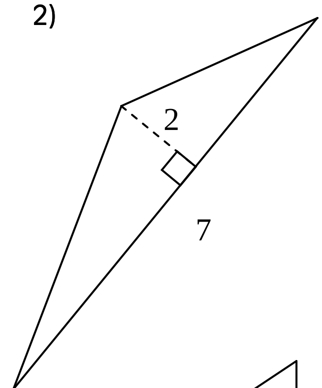


Encuentra el área de los siguientes triángulos.

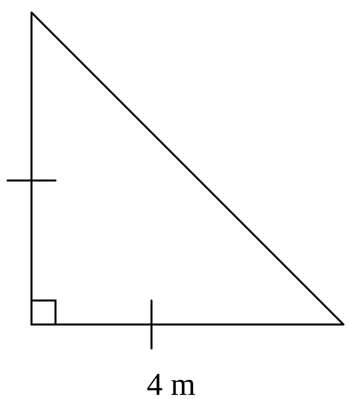
1)



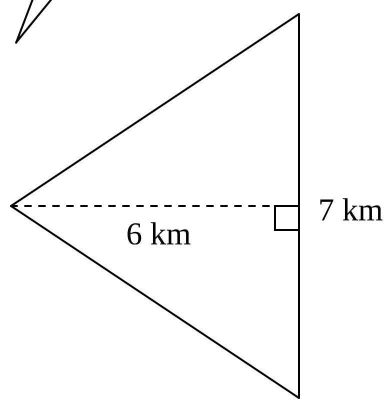
2)



3)

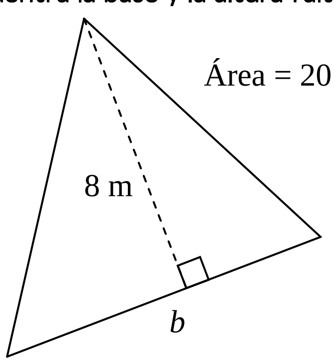


4)

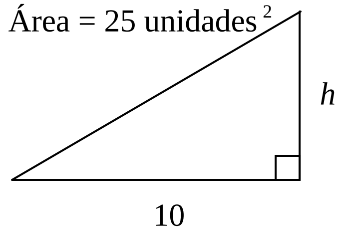


Encuentra la base y la altura faltantes en los siguientes triángulos utilizando la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$.

5) Área = 20 m^2

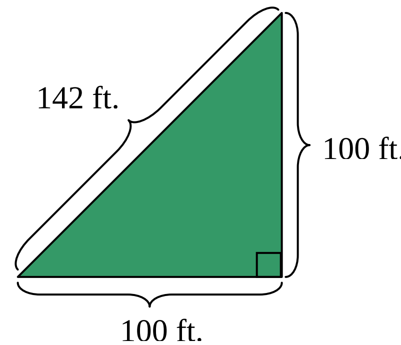


6) Área = 25 $unidades^2$



Platicas con Jorge unas semanas después. Te cuenta que tiene un trabajo diferente en el aeropuerto. Ahora, quieren que empareje el pasto alrededor del perímetro de las pistas. Ganará dos dólares por cada pie de pasto que empareje. Desea que le ayudes a calcular cuánto dinero ganará en comparación con lo que ganaba cortando el pasto.

Encontrar el perímetro de un triángulo es lo mismo que encontrar el perímetro de un cuadrilátero. Todo lo que tenemos que hacer es sumar las longitudes de todos los lados.



En el triángulo formado por las pistas de aterrizaje, el perímetro es la suma de todos los lados.

El perímetro es

$$100 + 100 + 142 = 342 \text{ ft.}$$

Esto significa que Jorge ganará

$342 \times \$2 = \$684$, por emparejar el pasto.

Comparando los \$684 contra \$500 (el dinero que ganaba cortando pasto),

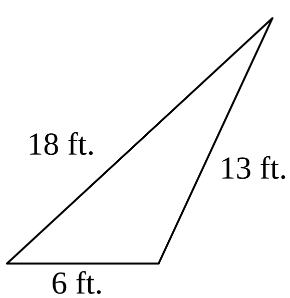
$$684 - 500 = \$184$$

Jorge puede ver que ganará \$184 más emparejando el pasto que cortándolo.

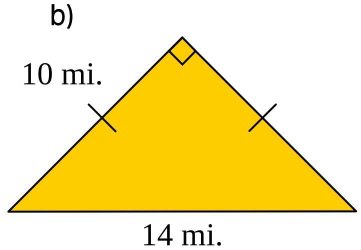
Ejemplo

Encuentra el perímetro de los siguientes triángulos.

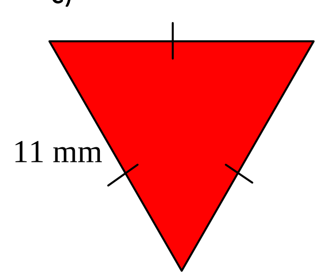
a)



b)



c)



Solución

Para encontrar el perímetro de cada uno de estos triángulos, tenemos que sumar todos los lados.

a) Conocemos la longitud de todos los lados de este triángulo. El perímetro es

$$6 + 13 + 18 = 37 \text{ ft.}$$

b) Conocemos solo dos lados del triángulo isósceles. Sabemos que el tercer lado mide 10 mi., porque la marca en este lado nos dice que es congruente con el lado que mide 10 mi.

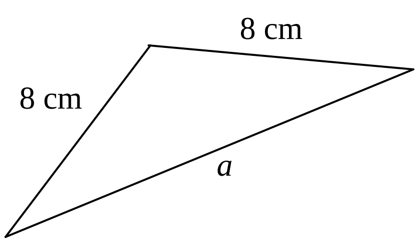
$$10 + 10 + 14 = 34 \text{ mi.}$$

c) Conocemos solo un lado del triángulo equilátero. Todos los lados de un triángulo equilátero son iguales, por tanto todos los lados miden 11 mm.

$$11 + 11 + 11 = 33 \text{ mm}$$

Ejemplo

Si el perímetro total del triángulo mide 28 cm, encuentra la longitud del lado faltante.



Solución

Si el perímetro total mide 28 cm, entonces la suma de las longitudes de los lados es de 28 cm. Esto significa que podemos establecer la ecuación,

$$8 + 8 + a = 28$$

$$\begin{aligned} 16 + a &= 28 \\ -16 \qquad &\quad -16 \end{aligned}$$

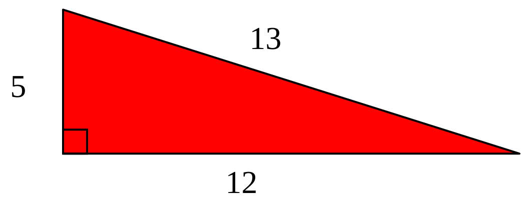
$$a = 12$$

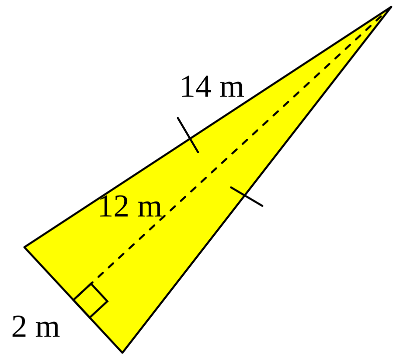
<u>*Verifica*</u>*: a =* 12

$$\begin{aligned} 8 + 8 + a &= 28 \\ 8 + 8 + (\ \ ) &= 28 \\ 8 + 8 + (12) &= 28 \\ 28 &= 28 \ \checkmark \end{aligned}$$

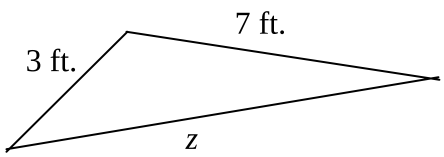
¡Inténtalo!

Encuentra el área y el perímetro de los siguientes triángulos.

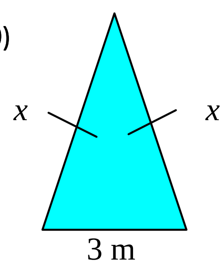
7) 

8) 

Dados los perímetros, encuentra la longitud del(los) lado(s) faltante(s) en cada triángulo siguiente.

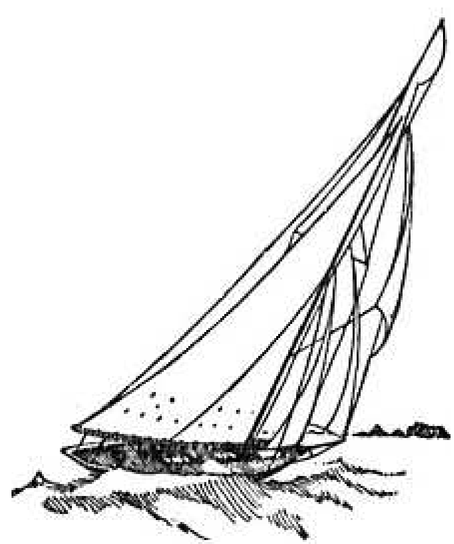
9) 

Perímetro = 18 ft.

10) 

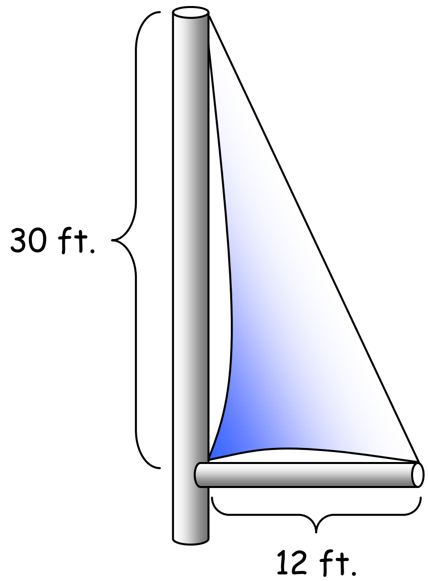
Perímetro = 17 m.

Los miércoles, eres voluntario en un centro juvenil local donde instruyes a niños menores. Una de estas jóvenes, Ivette, necesita ayuda. Ella explica lo siguiente. "Mi Tío Hernández navega en botes de vela. El bote en que navega se conoce como 'balandro'. Es fabuloso para navegar contra el viento. Este verano me llevó con él a navegar, y me gustó tanto que quise construir un modelo a escala del bote. El único problema es que mi hermano sacó el modelo de la caja y perdió unas cuantas piezas. ¿Me puedes ayudar a fabricar nuevas piezas?"



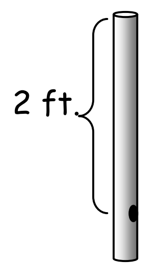
Balandro de vela

Continua diciendo, “la vela principal del balandro de mi tío tiene estas medidas:” Ivette te muestra el diagrama que dibujó. “Solo tengo una parte de la vela principal que quedó.”



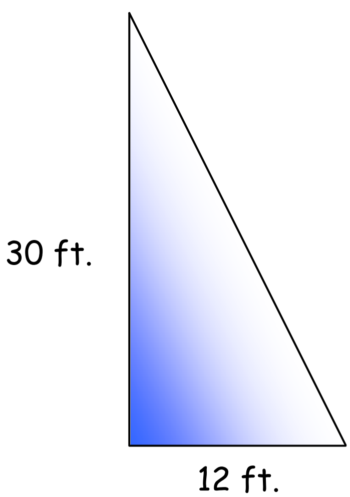
Balandro del Tío Hernández

Ivette te pregunta, “¿Qué tan larga debo hacer la otra parte de mi vela principal?”



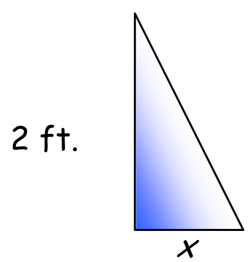
Modelo a escala de Ivette

Te das cuenta que si el modelo fue hecho a escala, sus velas y las velas reales del balandro forman triángulos similares. Dibujas una versión sencilla del diagrama de Ivette.



Balandro del Tío Hernández

La longitud de la pieza del fondo no se conoce, por lo que utilizas la variable, x, para representarla.



Modelo a escala de Ivette

Recuerda

Si dos figuras son similares, las longitudes de sus lados correspondientes son <u>proporcionales</u>.

HECHO

Los triángulos con tres ángulos congruentes son triángulos similares. (Solo es cierto para los triángulos.)

Si las figuras son proporcionales, la <u>razón</u> de las longitudes de sus lados será igual. Esto significa,

$$\frac{base\ grande}{lado\ grande} = \frac{base\ chica}{lado\ chico}$$

$$\frac{12}{30} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{12}{30} = \frac{x}{2}$$

Multiplica en cruz.

$$\frac{30x}{30} = \frac{24}{30}$$

Divide cada lado entre 30.

Recuerda

Cuando conoces la proporción, multiplica en cruz, luego divide.

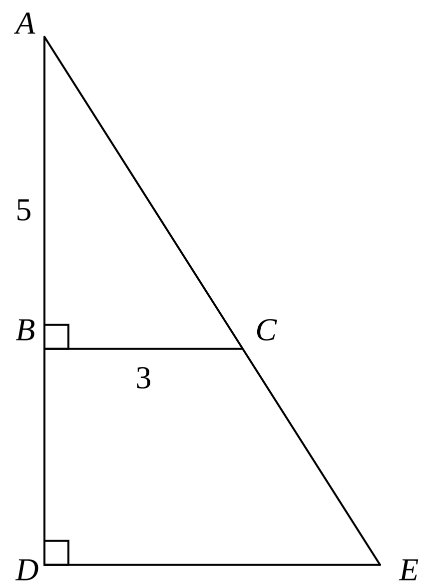
$$x = 0.8$$

Le dices a Ivette, "debes hacer una pieza de ocho décimas de pie libres."

"¡Muchas gracias!" exclama. "¡Eres lo máximo!"

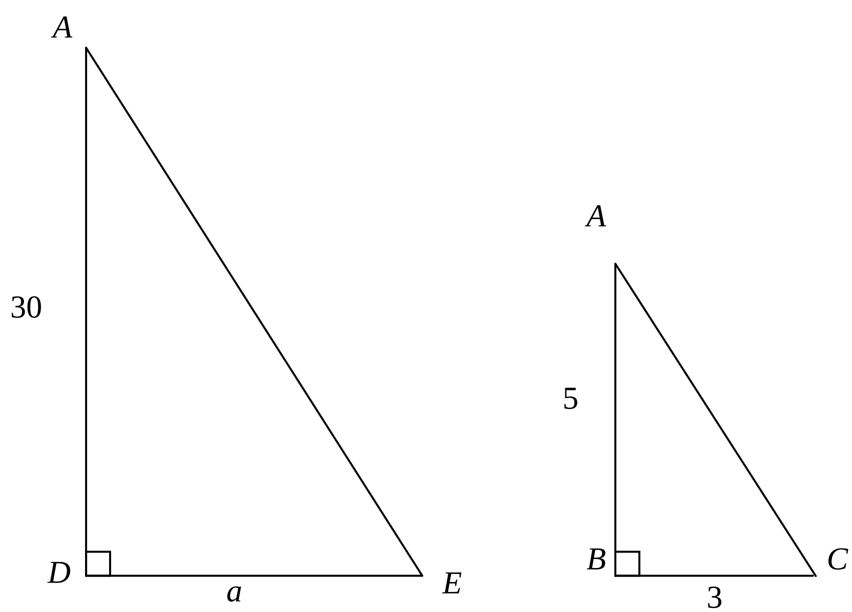
Ejemplo

En esta figura, *AD* = 30. ¿Cuál es la longitud de $\overline{DE}$?



Solución

¿Cuántos triángulos ves en el diagrama? Deberías ver dos: ΔABC y ΔADE. Permítenos redibujarlos abajo, con las medidas proporcionadas. Usaremos una variable, *a*, para representar el lado que estamos tratando de encontrar, *DE*.



Enseguida, fijaremos nuestra proporción. Nota que existen muchas formas de encontrar las proporciones en figuras similares. Utilizaremos las partes correspondientes. Es decir,

$$\frac{lado\ grande}{lado\ chico} = \frac{base\ grande}{base\ chica}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

Ahora sustituye las longitudes de cada lado.

$$\frac{30}{5} = \frac{a}{3}$$

Nota: Existen varias formas de resolver esta ecuación. Si multiplicar en cruz siempre funciona, utilizaremos este método. Sin embargo, si encuentras una forma más rápida de resolver esto (y hay una forma), siéntete libre de usarla. Solo asegúrate de verificar tu respuesta.

$$\frac{90}{5} = \frac{5a}{5}$$

$$18 = a$$

<u>*Verifica*</u>: *a* = 18

$$\frac{30}{5} = \frac{a}{3}$$

$$\frac{30}{5} = \frac{(\ )}{3}$$

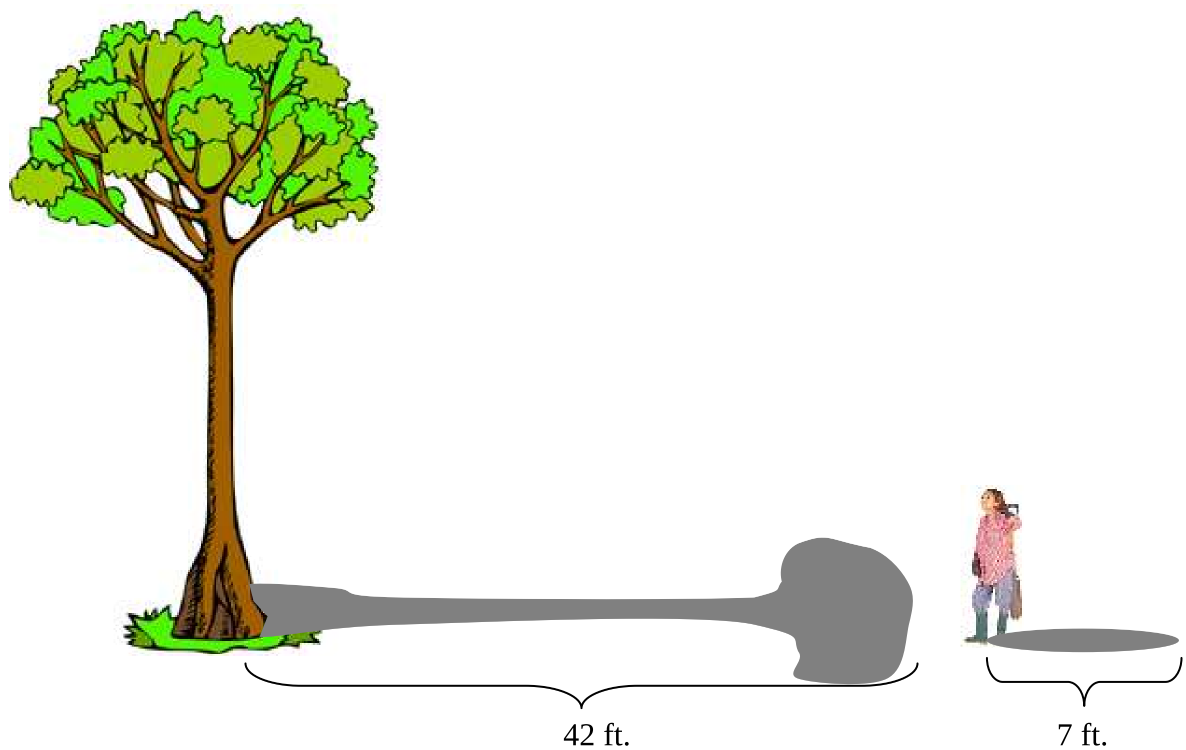
$$\frac{30}{5} = \frac{(18)}{3}$$

$$6 = \frac{18}{3}$$

$$6 = 6 \quad \surd$$

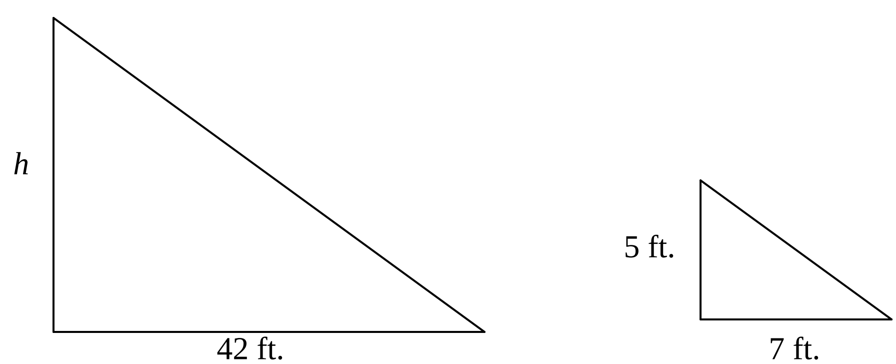
Ejemplo

Elena tiene un negocio de jardinería. Un día recibe una llamada de un cliente que quiere que le corten un árbol. Ella llega al sitio y necesita saber qué tan alto es el árbol para efectos de facturación. Ella sabe que su altura es de 5 feet. El sol proyecta la sombra de ella y del árbol. Encuentra la altura del árbol.



Solución

Con un poco de imaginación, podemos rehacer el diagrama de arriba utilizando triángulos. Anotamos la información proporcionada y utilizamos una variable, h, para representar lo que necesitamos encontrar.



Estos son triángulos similares, por tanto podemos establecer una proporción.

$$\frac{altura\ del\ árbol}{altura\ dela\ persona} = \frac{sombra\ del\ árbol}{sombra\ de\ la\ persona}$$

$$\frac{h}{5} = \frac{42}{7}$$

$$\frac{h}{5} = \frac{42}{7}$$

$$\frac{7h}{7} = \frac{210}{7}$$

$$h = 30$$

<u>*Verifica*</u>: $h = 30$

$$\frac{h}{5} = \frac{42}{7}$$

$$\frac{(\ )}{5} = \frac{42}{7}$$

$$\frac{(30)}{5} = \frac{42}{7}$$

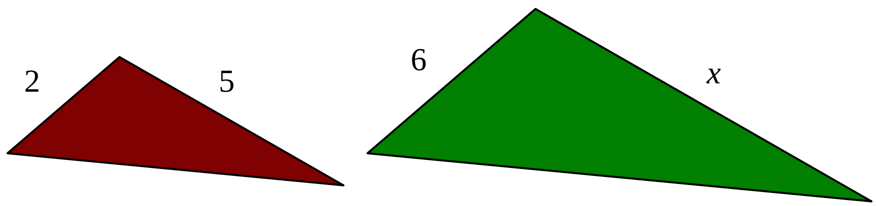
$$6 = \frac{42}{7}$$

$$6 = 6$$

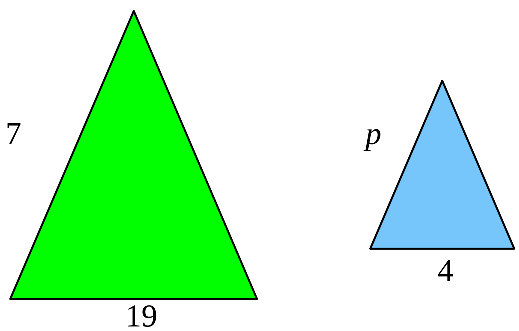
¡Inténtalo!

Dados los siguientes triángulos similares, utiliza las proporciones para encontrar el lado faltante. (Aproximado a décimas.)

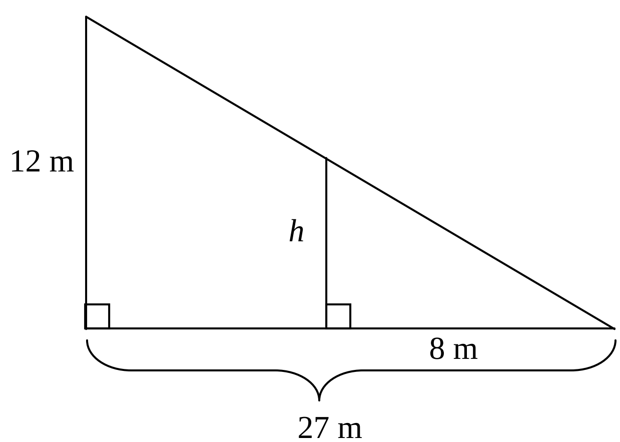
11)



12)



13)



Repaso

1. Marca la definición de “diagonal.”

2. Marca los cuadros de “Recuerda”.

3. Escribe una pregunta que te gustaría hacerle a tu instructor, o algo nuevo que hayas aprendido en esta lección.

Problemas de práctica

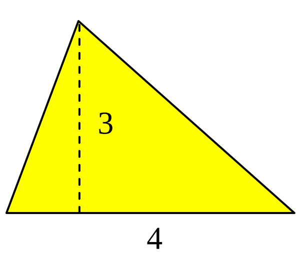
Math On the Move Lección 20

Instrucciones: Escribe las respuestas en la libreta de matemáticas. Titula este ejercicio Math On the Move – Lección 20, Conjuntos A y B

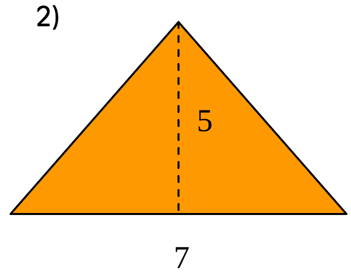
Conjunto A

Utiliza la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ para encontrar el área de cada triángulo con aproximación a décimas.

1)



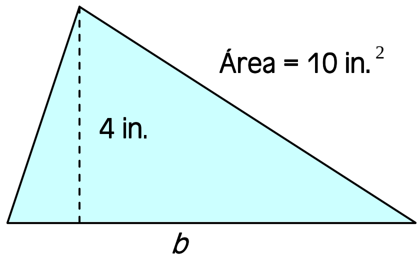
2)



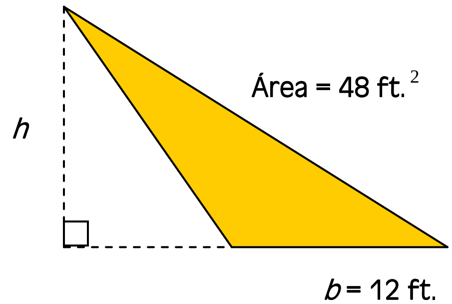
3) Un triángulo con base de 17 feet, y altura de 15 feet

Utiliza la formula, $A = \frac{1}{2}bh$ para encontrar la longitud de la base o la altura de los siguientes triángulos.

4)

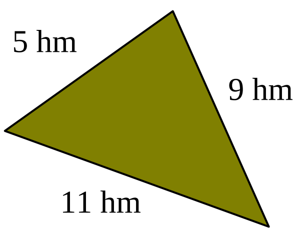


5)

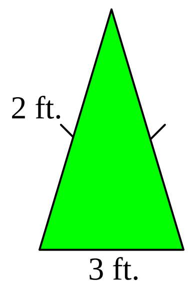


Encuentra el perímetro de cada triángulo.

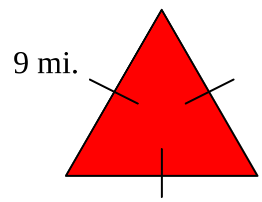
6)



7)

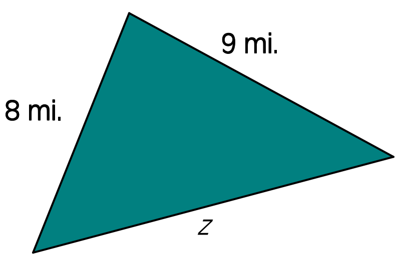


8)



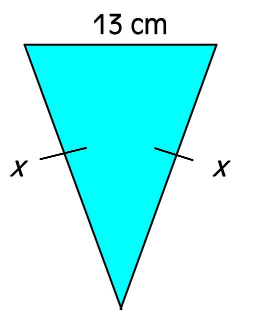
Dado el perímetro, encuentra la longitud de cada lado faltante en cada triángulo.

9)



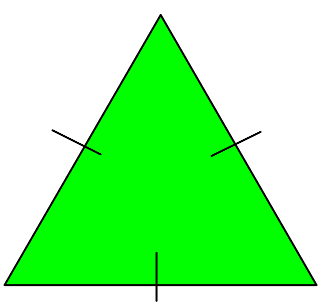
Perímetro = 27 mi.

10)



Perímetro = 41 cm

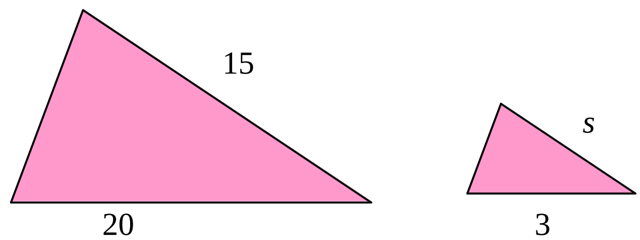
11)



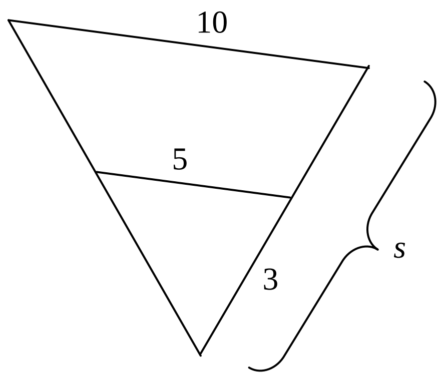
Perímetro = 78

Dados triángulos similares, encuentra *s*.

12)



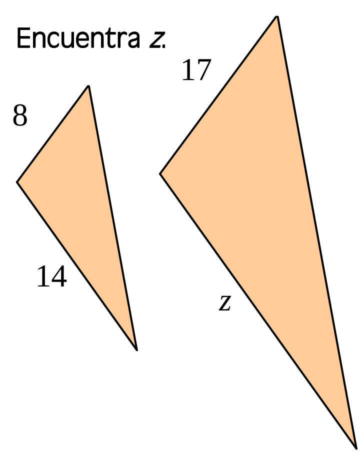
13)



Conjunto B

1) Dibuja dos polígonos con ángulos congruentes correspondientes, que <u>no</u> sean similares. (Pista*:* no serán triángulos.)
2) Para el siguiente problema:

Encuentra *z*.



Melissa establece la siguiente proporción:

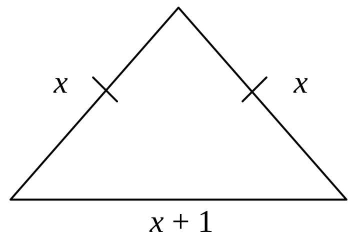
$$\frac{z}{14} = \frac{17}{8}$$

Hector la establece en esta otra forma:

$$\frac{17}{z} = \frac{8}{14}$$

¿Quién está en lo correcto, Melissa o Hector? Encuentra z en ambas ecuaciones. ¿Qué es lo que notas? ¿Por qué crees que esto es así?

3) El perímetro del triángulo siguiente es 16. Encuentra la longitud de cada lado.



Respuestas a Inténtalo

1) $A = 45\ cm^2$

2) $A = 7\ units^2$

3) $A = 8\ m^2$

4) $A = 21\ km^2$

5) $20 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot b$

$b = 5\ m$

6) $25 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h$

$h = 5 units$

7) $A = 30\ units^2$

$P = 30\ units$

8) $A = 12\ m^2$

$P = 30\ m$

9) $z = 8\ \ ft.$

10) $2x + 3 = 17$

$x = 7\ m$

11) $x = 15 units$

12) $p = 1.5 units$

13) $h = 3.6 m$

NOTAS

Fin de la lección 20