ACReS

Habilidades Académicas y de Preparación para la Carrera

# Repaso de Matemáticas Elementales

Unidad

2

National PASS Center

2013

# Lección 5

# Fracciones

**Vocabulario:**

- √ **fracción**
- √ **numerador**
- √ **denominador**
- √ **numero mixto**

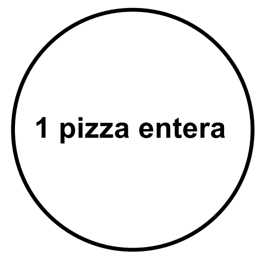
Una **fracción** contrasta las partes contra el entero. Es el cociente de dos números, a y b. Una fracción se puede escribir como $\frac{a}{b}$ y significa $\mathbf{a \div b}$. El número de arriba en la fracción se denomina **numerador**. El número de abajo en la fracción se conoce como **denominador**. Un **número mixto** es la suma de un entero y una fracción. El signo **+** no se muestra. Se ve como esto, $3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$.

Imagínate que trabajas en una pizzería. Una noche, una familia de cuatro entra y ordena una pizza. Ellos te piden que la cortes en cuatro partes iguales – una para cada miembro de la familia.

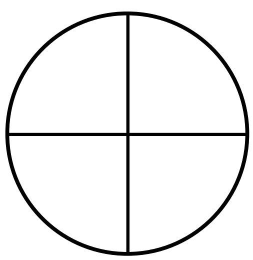
Justo después de eso, entra una familia de cinco, y ordena en forma similar. Cortas entonces la pizza en cinco rebanadas iguales – una para cada miembro de la familia. Finalmente, entra una familia de diez personas, ¡y ordena en la misma forma! ¿Cuál de las pizzas tendrá las rebanadas más grandes?

Cada una de las órdenes fue por una pizza de igual tamaño. La primera se dividió en cuatro partes iguales. La segunda en cinco partes iguales. Y la tercera en diez partes iguales. Cada miembro de la primera familia comió más pizza que los miembros de las otras dos familias. Cada rebanada de su pizza era más grande que las rebanadas de las otras pizzas. Si no lo crees, no te preocupes. Lo podemos demostrar con dibujos y con matemáticas.

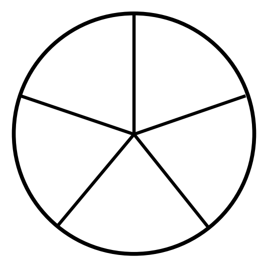
La pizza normalmente es redonda.
Este círculo representa una pizza completa.



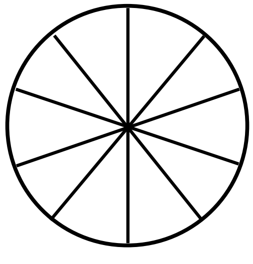

Ésta es la pizza de la familia de cuatro. Está dividida en cuatro partes iguales.



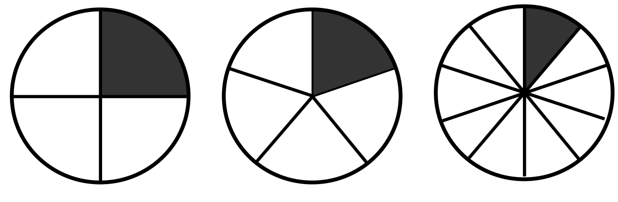
Ésta es la pizza de la familia de cinco. Está dividida en cinco partes iguales.



La pizza de la familia de diez está dividida en diez partes iguales.



La pregunta era qué familia iba a tener la rebanada más grande para cada uno de sus miembros. Compara los tamaños de las áreas sombreadas de cada pizza.



La pizza cortada en cuatro piezas tiene el área sombreada más grande. Eso significa que la familia de cuatro tuvo la rebanada más grande para cada uno de ellos.

El problema de la pizza se puede mostrar con matemáticas utilizando fracciones. Las fracciones comparan las partes contra el entero.

✓ Una fracción es el cociente de dos números, *a* y *b*. Una fracción se escribe como $\frac{a}{b}$, y quiere decir $a \div b$.

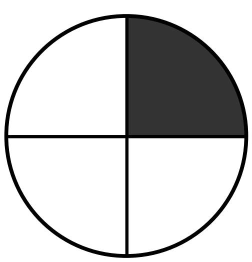
Cada una de las pizzas hechas para las tres diferentes familias se puede ilustrar utilizando **fracciones**.

HECHO

***Las fracciones se usan más frecuentemente para representar partes de un entero. Escribiríamos esto como***

$$\frac{\text{parte}}{\text{entero}}$$

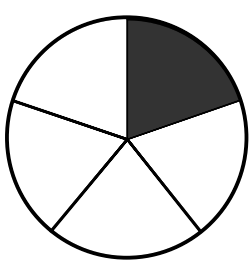
La pizza de la familia de cuatro se muestra a continuación.



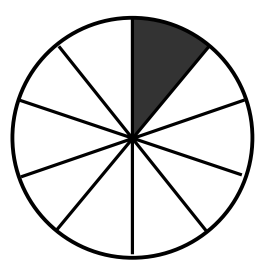
La pizza <u>entera</u> se compone de 4 rebanadas.
Una rebanada es 1 <u>parte</u> de la pizza entera.
Una rebanada es una de cuatro rebanadas.

La idea se puede ilustrar por la fracción $\frac{1}{4}$

Las pizzas de las otras familias se deben ver de la siguiente manera:



$= \frac{1}{5}$



$= \frac{1}{10}$

El área sombreada de cada dibujo corresponde a una rebanada de pizza. Es solo 1 porción de la pizza entera. La pizza entera está formada por el número total de rebanadas. La rebanada o porción será el numerador de una fracción. El número total de porciones, o el entero, será el denominador.

- ✓ El número de arriba en una fracción se llama numerador.
- ✓ El número de abajo en una fracción se llama denominador.

$$\frac{\textbf{numerador}}{\textbf{denominador}}$$

El denominador te indica el número total de partes en el entero. El numerador te indica cuántas de esas partes tienes.

Por ejemplo: $\frac{1}{2}$ significa una de dos partes, o un-medio;

$\frac{1}{3}$ significa una de tres partes, o un-tercio;

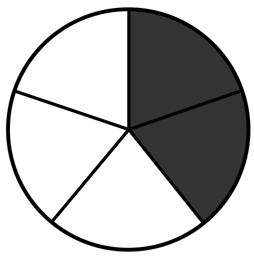
$\frac{1}{4}$ significa una de cuatro partes, o un-cuarto;

$\frac{1}{5}$ significa una de cinco partes, o un-quinto, y así sucesivamente.

El problema de la pizza se refería a una sola rebanada. ¿Qué pasa cuando se trata de varias rebanadas?

**Ejemplo:** Dos miembros de la familia de cinco deciden guardar sus rebanadas de pizza para después. ¿Qué fracción de la pizza entera se guardará para después?

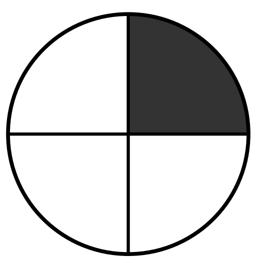
***Solución:*** En este caso, hay cinco (5) rebanadas en total. Dos (2) de ellas se guardan. El denominador será 5 porque hay un total de cinco rebanadas. El numerador será 2 porque solo te interesa guardar 2 de las 5 rebanadas.



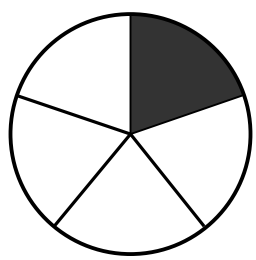
$$= \frac{2}{5}$$

**Así, $\frac{2}{5}$ de la pizza se guardará para después.**

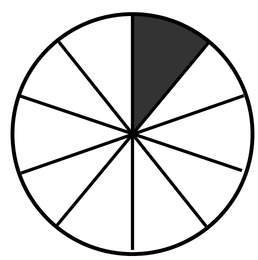
Ahora vuelve a ver el problema original de la pizza.



$\frac{1}{4}$



$\frac{1}{5}$



$\frac{1}{10}$

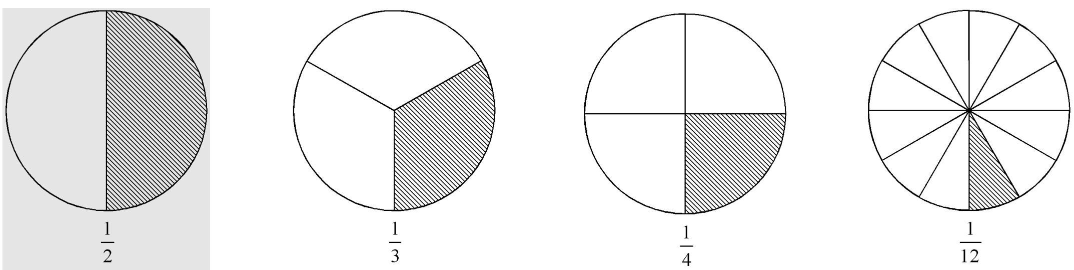
El área sombreada del círculo de la izquierda es la más grande. El área sombreada del círculo de la derecha es la más pequeña. Puedes comparar las áreas sombreadas utilizando fracciones. Obtendrás algo como lo siguiente:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{10}$$

Puedes utilizar este método para comparar fracciones solamente si cada fracción es parte del mismo entero. En este caso, los círculos idénticos representaban una pizza entera.

**Ejemplo***:* Compara el tamaño de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{12}$. Ponlas en orden, desde la más chica hasta la más grande.

***Solución:*** Utilizaremos dibujos para ayudarnos a contestar esta pregunta.

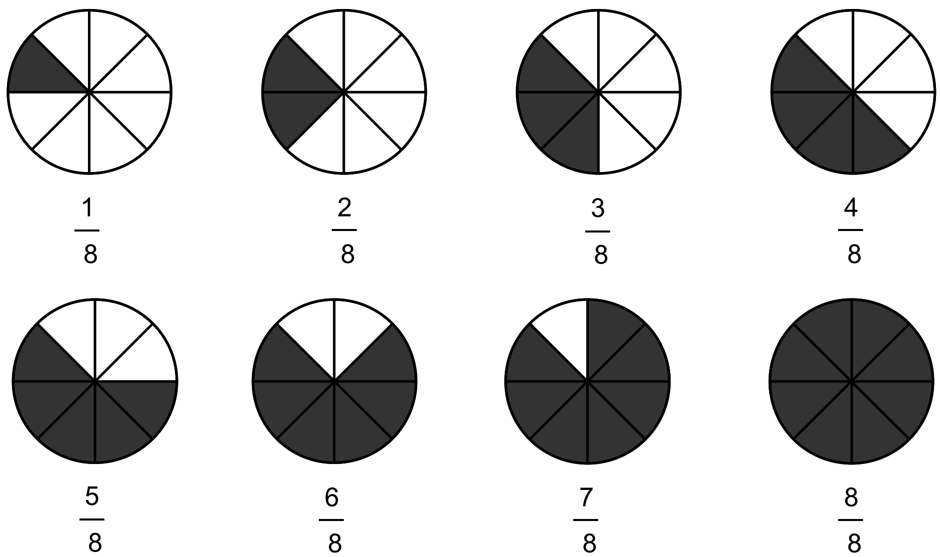



En las imágenes de arriba, el círculo del mismo tamaño representa un entero. Cada círculo se divide en partes del mismo tamaño. Podrás ver que más partes = partes más pequeñas. El orden de las fracciones, desde la menor (más chica) hasta la mayor (más grande), es

$$\frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2}$$

✓ Si un conjunto de fracciones tiene el mismo numerador, la fracción con el denominador <u>más pequeño</u> será el de valor más grande.

¿Qué pasa si las fracciones tienen el mismo denominador, pero numeradores diferentes? Observa el ejemplo siguiente. ¿Qué es lo que notas?




Al crecer el numerador, crece también el valor de la fracción. ¿A qué se debe esto? Recuerda: El numerador te indica cuántas partes del entero tiene la fracción. La fracción $\frac{1}{5}$ indica que tú tienes una parte de un entero con cinco partes, o un-quinto. ¿Cómo comparas esto con la fracción $\frac{2}{5}$ ?

Aún estás manejando quintos, pero ahora tienes dos de ellos.

$\frac{2}{5}$ debe ser más grande que $\frac{1}{5}$ .

Intenta resolver algunos problemas de fracciones tú solo.

## ¡Inténtalo!

**1.** Circula la fracción más grande.

**a.** $\frac{1}{11}$ o $\frac{1}{9}$ **b.** $\frac{6}{17}$ o $\frac{6}{15}$ **c.** $\frac{13}{19}$ o $\frac{11}{19}$

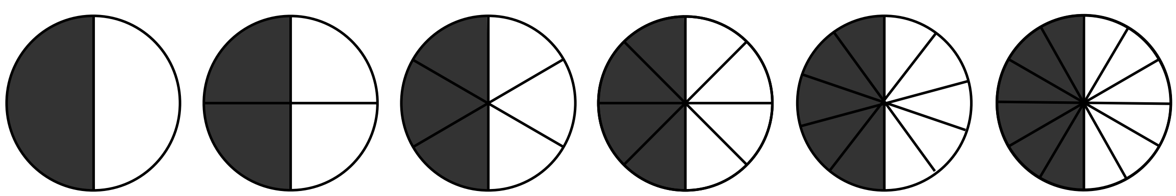
Comparar fracciones negativas y positivas funciona de la misma manera que comparar enteros negativos y positivos.

Por ejemplo, piensa en $-\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$. La primera fracción podría parecer más grande, porque su numerador es 2. Pero, $-\frac{2}{3}$ es un número negativo y menor que 0. Un-tercio ($\frac{1}{3}$) es un número positivo y más grande que 0.

$$-\frac{2}{3} < \mathbf{0} < \frac{1}{3}$$

## Fracciones Equivalentes

En ocasiones, fracciones que se ven diferentes pueden ser iguales en valor. Observa la representación gráfica de estas fracciones.



$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{6}{12}$

Puedes notar que las partes sombreadas de cada círculo son todas iguales. Todas ellas representan la mitad del círculo. La única diferencia es el número de partes iguales que contiene cada círculo.

Puedes utilizar algebra para mostrar por qué todas estas fracciones son equivalentes – tienen igual valor. Una vez más, las versiones de igual valor de $\frac{1}{2}$ son $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, y $\frac{6}{12}$.

¿Puedes ver el patrón que siguen estos números? Reescribamos las fracciones para mostrar más claramente por qué son iguales.

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times1}{2\times1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3}\right)$$

$$\frac{4}{8} = \frac{1\times 4}{2\times 4} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{4}\right)$$

$$\frac{5}{10} = \frac{1\times 5}{2\times 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{5}\right)$$

$$\frac{6}{12} = \frac{1\times 6}{2\times 6} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{6}\right)$$

**HECHO**

*Cualquier número dividido entre sí mismo es igual a uno.*

$\frac{5}{5} = 1$ *y* $\frac{z}{z} = 1$

**HECHO**

*La propiedad de identidad de la multiplicación establece que cualquier número multiplicado por 1 da el mismo número. Esto te permite multiplicar cualquier fracción por 1 ¡sin cambiar su valor!*

Cada forma igual a $\frac{1}{2}$ es solamente $\frac{1}{2}$ multiplicado por algo igual a uno!

Cada fracción de arriba se puede escribir como $\frac{1}{2}\times 1$. La propiedad de identidad nos dice que $\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$. Así, cada fracción de arriba es igual a $\frac{1}{2}$.

Puedes utilizar la propiedad de identidad para encontrar fracciones equivalentes para *cualquier* fracción.

**Ejemplo:** Escribe dos fracciones que sean equivalentes a $\frac{1}{3}$.

***Solución:*** Si multiplicas tanto el numerador como el denominador por 2, verás que

$$\frac{1}{3} = \frac{1\times 2}{3\times 2} = \frac{2}{6}$$

O puedes multiplicar tanto el numerador como el denominador por 3 y obtener

$$\frac{1}{3} = \frac{1\times 3}{3\times 3} = \frac{3}{9}$$

Así, $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{9}$ son equivalentes a $\frac{1}{3}$.

## ¡Inténtalo!

**2.** Escribe dos fracciones que sean equivalentes a:

**a.** $\frac{3}{5}$

**b.** $\frac{2}{3}$

**3.** Completa la fracción equivalente.

**a.** $\frac{3}{5} = \frac{12}{\square}$

**b.** $\frac{16}{24} = \frac{\square}{12}$

Las fracciones equivalentes pueden ser útiles. Te pueden ayudar a reescribir fracciones utilizando números más pequeños.

Por ejemplo, $\frac{30}{45}$ es una fracción con números grandes. Puedes simplificarlo utilizando fracciones equivalentes y factores comunes.

✓ Una fracción está en su forma más simple o en sus términos menores, si el numerador y el denominador no comparten factores comunes. Así, la fracción no tiene formas equivalentes con números más pequeños.

La forma más simple y términos más bajos significan la misma cosa. “Simplificar” significa poner algo en su mínima expresión.

**Por ejemplo,** $\frac{6}{9}$ no está en su expresión más simple.

El numerador y el denominador comparten un factor común de 3.

$\frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$ Ahora si está en su mínima expresión.

## Regla

Para poner una fracción en su mínima expresión:

**1.** Encuentra el Factor Común Más Grande del numerador y del denominador.

**2.** Divide el numerador y el denominador entre ese factor.

Recuerda: Si el numerador y el denominador de una fracción no comparten factores, se encuentran ya en su mínima expresión. Si esto sucede, el FCMG de su numerador y de su denominador será 1.

**Ejemplo:** Escribe $\frac{30}{45}$ en su mínima expresión.

***Solución:***

***Pasos 1 & 2:*** Escribe los factores del numerador y del denominador. Subraya, circula, o resalta los factores que tienen en común.

Factores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Factores de 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45

***Paso 3:*** Puedes ver que quince es el factor común más grande.

***Paso 4:*** Divide el numerador y el denominador entre el FCMG.

$$\frac{30}{45} = \frac{30 \div 15}{45 \div 15} = \frac{2}{3}$$

## ¡Inténtalo!

**4.** Escribe las siguientes fracciones en su mínima expresión.

**a.** $\frac{4}{12}$ **b.** $\frac{6}{15}$ **c.** $\frac{4}{5}$

Puedes utilizar el método de productos cruzados para verificar si las fracciones son equivalentes.

**Método de Productos Cruzados**

- ✓ Multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción.
- ✓ Luego, multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción.
- ✓ Si estos dos productos son iguales, las fracciones son equivalentes.

Si $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, luego $(1 \times 4) = (2 \times 2)$. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, luego $(a \times d) = (b \times c)$.

Se llama el método de productos cruzados porque multiplicas en cruz sobre el signo de igual como se muestra a continuación.

**Ejemplo:** Demuestra que $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ utilizando el método de productos cruzados.

***Solución***: Escribe la ecuación de fracciones.

Multiplica 1 x 12 y luego, 4 x 3, como se muestra.

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

$$(1 \times 12) = (3 \times 4)$$

$$12 = 12 \quad \checkmark$$

Los productos cruzados son iguales.
Las fracciones son equivalentes.

## ¡Inténtalo!

**5.** ¿Qué fracción *no* es equivalente a $\frac{2}{3}$? (Circula la respuesta correcta).

**a.** $\frac{2}{4}$ **b.** $\frac{6}{9}$ **c.** $\frac{4}{6}$ **d.** $\frac{20}{30}$

**6.** Decide si cada fracción esta a su mínima expresión o no. Simplifica cualquier fracción que no lo esté.

**a.** $\frac{8}{16}$ **b.** $\frac{12}{18}$ **c.** $\frac{9}{10}$ **d.** $\frac{13}{64}$

# Números Mixtos

Las fracciones representan partes de números enteros. Frecuentemente se combinan con números enteros en la vida real. Un número entero más una fracción se denomina como **número mixto**.

- ✓ Un número mixto es la suma de un número entero y una fracción. Cuando se escribe, el signo de más todavía está ahí, aunque no se vea.

$$3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}, \text{ y } A + \frac{b}{c} = A\frac{b}{c}.$$

*Por ejemplo:* Un recolector de uvas pizca suficientes uvas para llenar tres grandes barriles y $\frac{2}{3}$ de un cuarto barril. Esto se puede mostrar en el modelo que sigue.

$$1 + 1 + 1 + \frac{2}{3}$$

Puedes notar que $1+1+1+\frac{2}{3} = 3+\frac{2}{3}$.

$$3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$$

Los números mixtos no son números enteros. Ellos se encuentran entre dos números enteros. En el ejemplo de arriba, el recolector de uvas llenó tres barriles de uvas más una parte de otro barril. Así, el número mixto $3\frac{2}{3}$ se encuentra entre los números enteros 3 y 4.

Existe una forma específica de expresar los números mixtos. Expresas $3\frac{2}{3}$ como "tres y dos-tercios". El número mixto, $5\frac{3}{4}$, se dice como, "cinco y tres-cuartos". Nota que: la palabra "y" se coloca entre el número entero y la fracción.

**Los números mixtos se pueden descomponer en fracciones.**

Utiliza la definición y trabaja hacia atrás. $3\frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3}$

Ahora, descompón el 3. $= 1 + 1 + 1 + \frac{2}{3}$

Sustituye la fracción equivalente por cada 1 – (tres-tercios). $= \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3}$

$= \frac{9}{3} + \frac{2}{3}$

Puedes sumar los numeradores porque los denominadores son iguales

$= \frac{11}{3}$

✓ Si el numerador de una fracción es menor que su denominador, se llama una ***fracción propia***. Si el numerador de una fracción es más grande que o igual a su denominador, se llama una ***fracción impropia***.

Por ejemplo $\frac{13}{3}$ es una fracción <u>impropia</u>, porque la porción de arriba, 13, es más grande que la de abajo, 3. La fracción $\frac{7}{18}$ es una fracción <u>propia</u>, ya que 7 es más pequeño que 18.

**Los números mixtos y los números enteros siempre se pueden mostrar como fracciones impropias.**

Cuando $3\frac{2}{3}$ se convirtió en una fracción impropia, notaste que $3\frac{2}{3}$ realmente quería decir "tres enteros y dos tercios". Luego, tres enteros se cambió a su equivalente nueve-tercios. Finalmente, nueve-tercios se combinaron con dos-tercios para obtener la respuesta, $3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$.

Este método se puede utilizar para convertir cualquier número mixto en una fracción impropia.

**Regla** Para convertir un número mixto en una fracción impropia:

1. Multiplica el número entero por el denominador de la fracción.
2. Suma este producto al numerador de la fracción.
3. Expresa la fracción en su mínima expresión.

$$5\frac{3}{4} = 5\frac{3}{4} = \frac{(5 \times 4) + 3}{4} = \frac{23}{4}$$

## ¡Inténtalo!

**7.** Escribe los números mixtos como fracciones impropias.

**a.** $1\frac{1}{3}$ **b.** $2\frac{7}{8}$ **c.** $3\frac{3}{4}$ **d.** $5\frac{3}{5}$

**¿Qué pasa si tienes una fracción impropia y deseas convertirla en un número mixto?**

**Ejemplo:** Escribe $\frac{9}{4}$ como un número mixto.

***Solución:*** En este ejemplo, estás trabajando con cuartos. Ya sabes que hay cuatro cuartos en un entero, porque $\frac{4}{4} = 1$.

El numerador de la fracción te indica cuántas partes tienes. En este caso existen nueve partes de cuartos. Lo que necesitas saber es cuántos grupos de cuatro hay en un nueve. Para averiguarlo, divide nueve entre cuatro.

$$\begin{array}{r} 2 \ \ R1 \\ 4\overline{)9} \\ \underline{8} \\ 1 \end{array}$$

> *Recuerda*
>
> *Las fracciones significan división.*
>
> $\frac{9}{4} = 9 \div 4$

Hay dos enteros y un cuarto sobrante. La respuesta es $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Puedes utilizar este método para convertir cualquier fracción impropia en un número mixto.

## Regla

Para convertir una fracción impropia en un número mixto:

1. Divide el numerador de la fracción entre su denominador.
2. El número de veces que cabe el denominador en el numerador será la parte "entera" del número mixto.
3. A la derecha de ese entero, escribe la fracción. El numerador erá el remanente encontrado en el paso 2. El denominador será el mismo de la fracción original.

$$\frac{9}{2}$$
$$= 9 \div 2$$
$$= 4\,R\,1$$
$$= 4\frac{1}{2}$$

**Ejemplo:** Escribe $\frac{14}{3}$ como un número mixto

***Solución:***

Primero escribe $\frac{14}{3}$ como un problema de división. $3\overline{)14}$

Encuentra el cociente con su remanente.

$$\begin{array}{r} 4 \ \ R\,2 \\ 3\overline{)14} \\ -12 \\ \hline 2 \end{array}$$

El 4 se queda a la izquierda como el número entero.

El 2 se convierte en el numerador de la fracción.

El 3 se convierte en el denominador de la fracción.

$$4\frac{2}{3}$$

## ¡Inténtalo!

**8.** Escribe las fracciones impropias como números mixtos en su mínima expresión.

**a.** $\frac{5}{3}$

**b.** $\frac{21}{8}$

**c.** $\frac{5}{4}$

**d.** $\frac{11}{5}$

**Fin de la Lección 5**