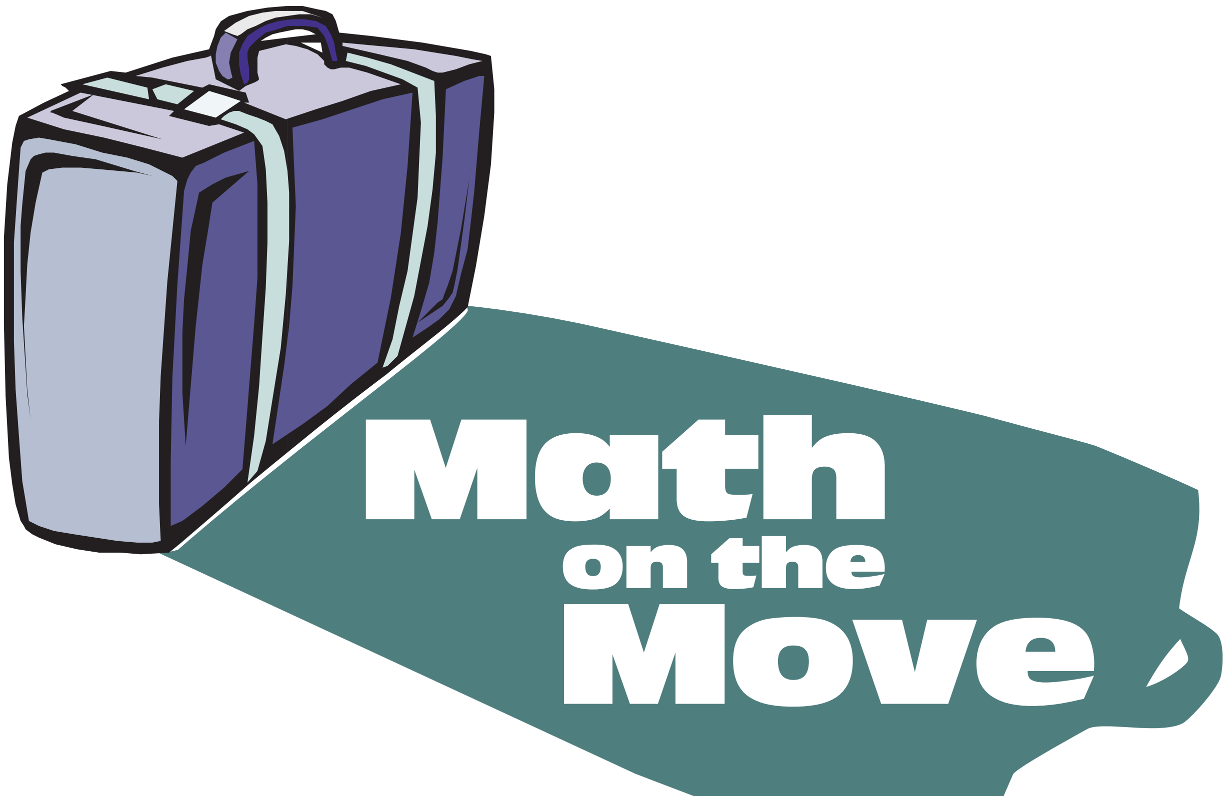
Nombre del estudiante: ______________________________

Fecha: ______________________________

Nombre de la persona de contacto: ______________________________

Número de teléfono: ______________________________




# Lección 6

## Operaciones con fracciones

### Objectivos

- Sumar y restar fracciones con denominadores iguales y diferentes
- Multiplicar y dividir fracciones

*Autores:*

Jason March, B.A.
Tim Wilson, B.A.

*Traductores:*

Felisa Brea
Hugo Castillo

*Editor:*

Linda Shanks

*Gráficos/Gráficas:*

Tim Wilson
Jason March
Eva McKendry

| |
|---|
| Como el sistema de medidas estándar es usado comúnmente en los Estados Unidos, esas unidades de medida (inches, feet, yards, miles, pounds, ounces, cups, pints, quarts, y gallons) han sido dejadas en inglés. Estas unidades de medida aparecen en mayor detalle en la lección 14. |

Centro National PASS
Centro Migrante BOCES Geneseo
27 Lackawanna Avenue
Mount Morris, NY 14510
(585) 658-7960
(585) 658-7969 (fax)
www.migrant.net/pass

Preparado por el Centro PASS bajo los auspicios del Comité Coordinador Nacional de PASS con fondos del Centro de Servicios de Educación de la Región 20, San Antonio, Texas como parte del proyecto dei Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante (MAS) = Logros en Matemáticas Achievement = Success (MAS) - Además, del apoyo de proyecto del Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante de Oportunidades para el Éxito para los Jóvenes fuera–de-la-Escuela (OSY) bajo el liderazgo del Programa de Educación Migrante de Kansas.

En tu siguiente turno en la pizzería, entra una pareja y pide una pizza cortada en ocho partes iguales. Observas que el hombre come tres trozos, y la mujer sólo come dos. Tú piensas, "¿Cuánta pizza se comieron? ¿Cuánta les queda?"

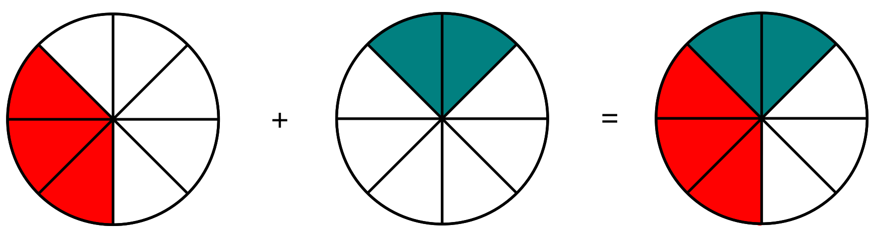
Pensemos en este problema usando fracciones.

El hombre comió tres de ocho trozos, $\frac{3}{8}$. La mujer comió dos de ocho trozos, o $\frac{2}{8}$.

Si añadimos cuánto comió cada uno de ellos, vemos que el total comido es

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}.$$

Podemos mostrar esto visualmente como:



$$\frac{3}{8} \quad + \quad \frac{2}{8} \quad = \quad \frac{5}{8}$$

Entonces, $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$. ¡La pareja comió $\frac{5}{8}$ de su pizza!

Aunque sumamos las dos fracciones, los denominadores siguen siendo los mismos.

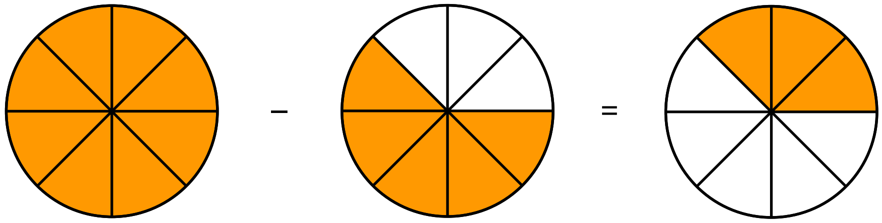
> ***Recuerda***
>
> *El denominador nos dice <u>de qué</u> está hablando. En este ejemplo, sumamos octavos, entonces nuestra respuesta será también en octavos.*

¿Cuánta pizza sobró?

La pareja pidió una pizza entera formada por ocho trozos, o $\frac{8}{8}$. Entonces comieron $\frac{5}{8}$ de la pizza. En matemáticas, esto es

$\frac{8}{8}-\frac{5}{8}$.

Podemos usar una ilustración para que nos ayude aquí también.



$$\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Vemos que $\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$. Observa que restamos sólo los numeradores. Los denominadores no cambiaron. Recuerda, hablamos de trozos del mismo tamaño. Cuando dos o más fracciones tienen el mismo denominador, las podemos sumar o restar simplemente al sumar o restar los numeradores. Los denominadores no cambian.


1. Suma o resta las fracciones, después expresa las respuestas de forma más simple.

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{6}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{9}{4}-\frac{7}{4}$

Supón que las familias de cuatro o cinco quieren más pizza, pero sólo tres personas de la familia de cuatro quieren otro trozo y una persona de la familia de cinco quiere otro trozo. En otras palabras, necesitas hacer $\frac{3}{4}$ de una pizza para la familia de cuatro, y $\frac{1}{5}$ de una pizza para la familia de cinco.

Ahora tú tienes un problema. ¿Cuánta pizza harás? Los trozos de pizza eran de diferente tamaño para las diferentes familias y tú no quieres despilfarrar y hacer dos pizzas enteras sólo para cortar cada una un poco diferente a la otra. Podemos hacer esto usando lo que sabemos de fracciones equivalentes, y lo que acabamos de descubrir de la suma de fracciones que tienen el mismo denominador. Entonces, la cantidad total de pizza que necesitas hacer es

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5}.$$

Quizás tu primera idea sea la de sumar los numeradores y los denominadores, y decir

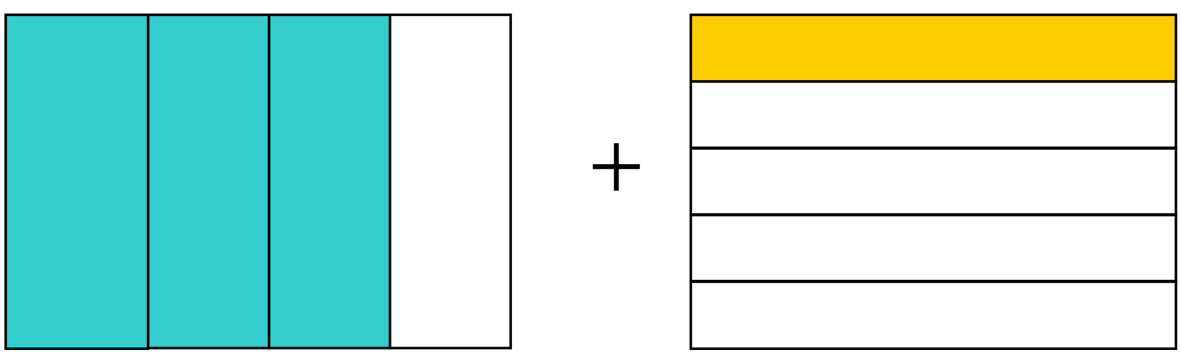
$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{4+5} = \frac{4}{9}.$$

Un momento, algo no está bien. Usando el sentido númerico, vemos que sumamos algo a $\frac{3}{4}$, y sabemos $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$, entonces nuestra respuesta debe ser mayor que $\frac{1}{2}$. Pero la respuesta que teníamos era $\frac{4}{9}$, y $\frac{4}{9}$ definitivamente no es mayor que $\frac{1}{2}$, entonces <u>esta manera de pensar es incorrecta.</u>

**HECHO**

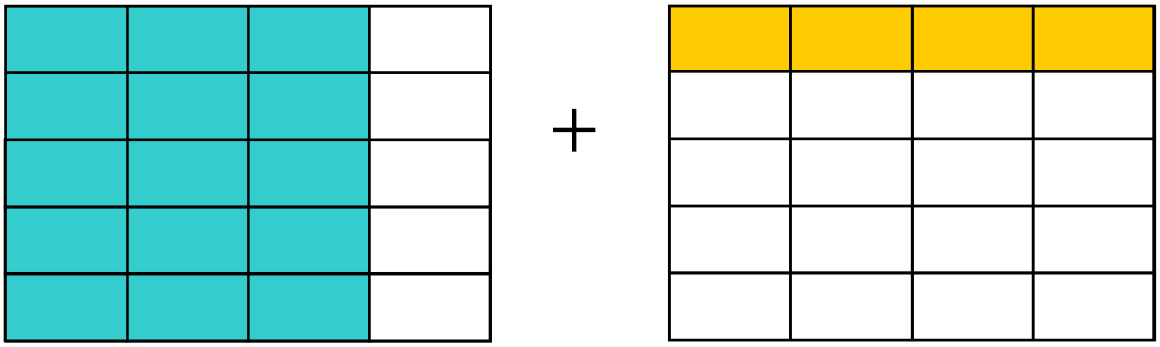
*Es **<u>incorrecto</u>** sumar fracciones sumando los numeradores y los denomindores.*

Volvamos a empezar con el modelo. Primero, mostramos que $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ puede ser ilustrado:



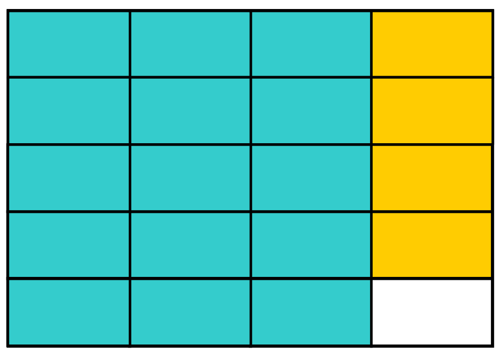
No podemos sumar las zonas sombreadas todavía porque son de diferentes tamaños: cuartos y quintos no son iguales.

¿Y si dibujamos la ilustración así?



$$\frac{15}{20} + \frac{4}{20}$$

Ahora vemos que cada trozo es del mismo tamaño, y todavía hay la misma cantidad sombreada. Ahora podemos combinar las áreas sombreadas y ver que es igual a



$$= \frac{19}{20}$$

Mostramos que ambas fracciones pueden ser divididas entre veinte cajas iguales, entonces pudimos sumar el número total de cajas sombreadas. Lo que realmente hicimos fue encontrar la fracción equivalente con el <u>mismo denominador</u>. Esto nos permite sumar las fracciones juntas como acabamos de aprender. El ejemplo visual nos da buenas ideas para sumar fracciones con diferentes denominadores. Observemos el ejemplo usando números y entonces podemos entender más.

***Ejemplo***

Halla la suma. $\frac{1}{15} + \frac{7}{12}$

***Solución***

Piensa en la mejor manera de resolver esto. No querrías dibujar un modelo para quinceavos o doceavos, sería demasiado difícil. Tenemos que usar números. Observemos las formas equivalentes de cada fracción para ver si tienen un denominador común.

Formas equivalentes de $\frac{1}{15}$ son $\frac{2}{30}, \quad \frac{3}{45}, \quad \frac{4}{60}, \quad \frac{5}{75}, \quad \frac{6}{90}, \quad \frac{7}{105}, \ldots$

Formas equivalentes de $\frac{7}{12}$ son $\frac{14}{24}, \quad \frac{21}{36}, \quad \frac{28}{48}, \quad \frac{35}{60}, \quad \frac{42}{72}, \quad \frac{49}{84}, \ldots$

Porque $\frac{4}{60}$ y $\frac{35}{60}$ tienen el mismo denominador, podemos sumarlas como hicimos.

$$\frac{4}{60} + \frac{35}{60} = \frac{39}{60}$$

¡Todavía no hemos terminado! Necesitamos comprobar si 39 y 60 comparten un factor común. De hecho, lo tienen; es 3. Para poner esta fracción en la forma más simple, dividimos el numerador y el denominador por el MCF que es 3.

$$\frac{39 \div 3}{60 \div 3} = \frac{13}{20}$$

Estamos buscando un denominador que dos fracciones comparten, podemos ahorrarnos tiempo si buscamos múltiplos de cada denominador.

***Recuerda***

*Un múltiplo de un número es el producto de ese número y cualquier otro número menos cero.*

***Ejemplo***

Simplifica $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

***Solución***

<u>Método 1</u>

Múltiplos de 6: 6, 12, 18,...

Múltiplos de 2: 2, 4, 6, 8, 10,...

El primero que tienen en común es 6. Para 6, $6 \times 1 = 6$ entonces no necesitamos cambiar $\frac{1}{6}$ a nada.

Para 2, $2 \times 3 = 6$, entonces debemos multiplicar el numerador y el denominador por 3 para conseguir

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

> ***Recuerda***
>
> *En este método hallamos el <u>mínimo común múltiplo</u> de los denominadores.*

Con denominadores comunes, podemos sumar los numeradores, y vemos

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}.$$

En términos más bajos, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

<u>Método 2</u>

Si multiplicamos los denominadores, vemos que $2 \times 6 = 12$. Podemos convertir un denominador de 12, al multiplicar $\frac{1}{6} \times \frac{2}{2}$ y $\frac{1}{2} \times \frac{6}{6}$ para conseguir $\frac{2}{12} + \frac{6}{12} = \frac{8}{12}$

Expresado en términos más bajos,

$$\frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}.$$

- Dos fracciones cuyo común denominador es su <u>MCM</u> se dice que tienen el **más bajo** o el **mínimo común denominador**, que se conoce como **MCD**.

En el Método 1, hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones y lo usamos para escribir fracciones equivalentes con el mínimo común denominador.

Con el Método 2, hallar un común denominador es un poco más fácil, pero convertir a la forma más simple requiere un poco más de trabajo. Prueba las dos maneras, entonces decide qué método te parece más fácil.


2. Resuelve usando el mínimo común denominador, y después de nuevo multiplicando los denominadores. Escribe la respuesta en los términos más bajos.

a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$

b) $\frac{8}{9}-\frac{2}{3}$

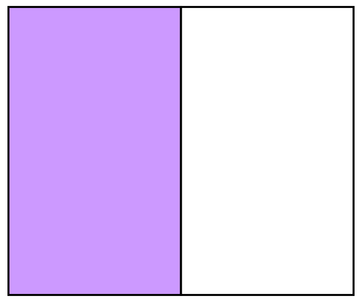
Ahora hemos hecho las suma y la resta de fracciones, podemos pasar a multiplicar y dividir fracciones.

Has decidido que trabajar en la pizzería es demasiado agotador y que preferirías trabajar al aire libre. Consigues un trabajo en un viñedo. Un día, recoges todas las uvas de una de las vides y llenas $\frac{1}{3}$ de un cubo de $\frac{1}{2}$ galón con uvas. Al cambiar a la siguiente vid, te preguntas "¿Cuántos galones he recogido?"

Era un tercio de medio galón. Matemáticamente, esto es $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$. ¿Podemos tomar un tercio de un grupo de una mitad? ¡Hagamos un modelo!

Mostremos un grupo de mitades abajo.

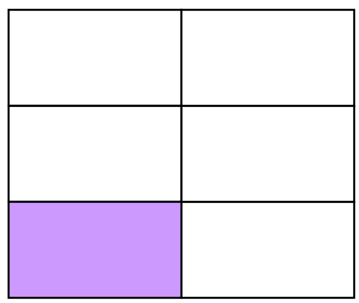
$$\frac{1}{2}$$



La mitad sombreada muestra la cantidad que lleva una cubeta dentro de un galón.

Pero estamos hablando de "un tercio de medio ." Debemos dividir ahora nuestras mitades en tercios,

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$



Podemos ver que un tercio de la mitad de un galón ¡Es en realidad un sexto de un galón!

Vemos ahora que tenemos una de seis partes iguales, entonces,

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

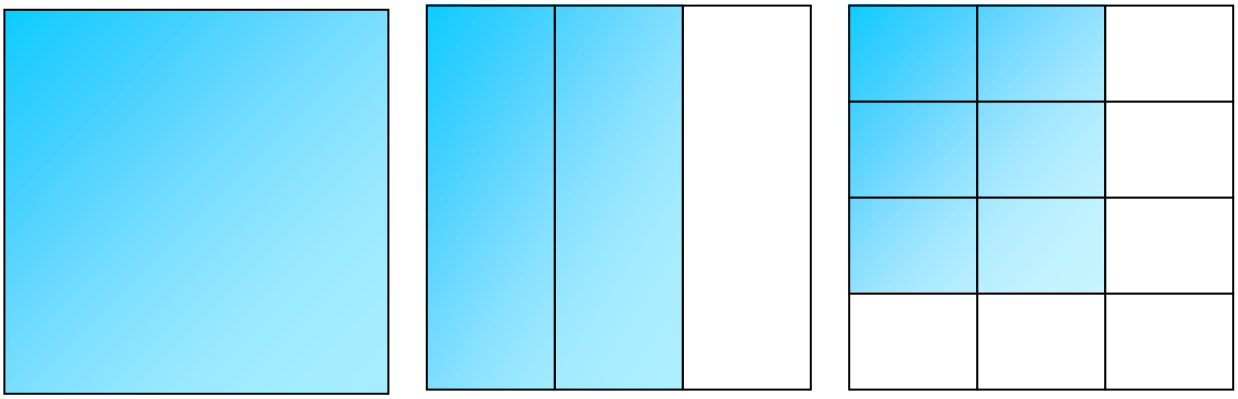
Aquí está otro ejemplo.

***Ejemplo***

María estaba cortando un vidrio para poner en una ventana. Lo cortó $\frac{2}{3}$ de metro de ancho por $\frac{3}{4}$ de metro de largo. ¿Cuál es el *área* del vidrio que María corta?

***Solución***

Necesitamos hallar cuánto vidrio corta María de un metro cuadrado. El área del vidrio que ella corta es cuánto toma de toda la pieza. Esto se calcula con $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$. Usemos un modelo otra vez.



Usamos un metro cuadrado, cortamos $\frac{2}{3}$ metros de ancho, y cortamos $\frac{3}{4}$ metros de largo.

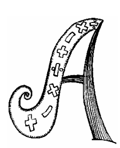
Entonces,

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ de un metro cuadrado, o $\frac{1}{2}$ metros cuadrados.

***Recuerda***

*El producto es la respuesta a una multiplicación.*

Hasta ahora, hemos visto que $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, y que $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Observa que cada vez, la respuesta es el producto del numerador sobre el producto del denominador.



Algoritmo

**Para multiplicar fracciones**:

1. Multiplica sus numeradores.
2. Multiplica sus denominadores.
3. Escribe la respuesta como $\frac{Paso\ 1}{Paso\ 2}$
4. Pon tu respuesta en la forma más simple.

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{3 \times 5} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

o $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$


3. Halla el producto de las siguientes fracciones, y simplifica:

a) $\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}$ b) $\frac{2}{5}\times\frac{4}{11}$ c) $\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}$

Recuerda que usamos fracciones para dividir un todo en partes. En el problema del viñedo, dividimos un galón entero en medios galones. Después dividimos medio galón en tercios para representar $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$.

Como una fracción es en realidad un problema de división, podemos escribir esto como

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} &= \frac{1}{3}\times 1 \div 2\\ &= \frac{1}{3}\div 2\\ &= \frac{1}{3}\div\frac{2}{1}\end{aligned}$$

Mira

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\div\frac{2}{1}$$

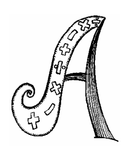
**Recuerda**

*La Propiedad de identidad de la multiplicaciónn dice que cualquier cosa multiplicada por uno es igual a sí mismo*

- Dada una fracción $\frac{a}{b}$, llamamos a su forma "dada vuelta" $\frac{b}{a}$, la **recíproca**. Por ejemplo, la recíproca de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$.
    - El <u>producto</u> de una fracción y su recíproco es 1. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$

Por la observación anterior, parece que podemos mostrar la multiplicación de fracciones como una fracción que se divide por la recíproca de otra fracción.

Si esto es verdad, podemos representar el <u>cociente</u> de dos fracciones como una fracción que se multiplica por la recíproca de la otra.



Algoritmo

**Para dividir fracciones:**

1. Cambia el signo de la división al signo de la multiplicación, y toma la recíproca del divisor (la fracción que está a la derecha).
2. Multiplica los numeradores y los denominadores.
3. Pon tu respuesta en la forma más simple.

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

## ¡Inténtalo!

4. Halla el cociente (la respuesta a la división).

a) $5 \div \frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{7}$

c) $\frac{5}{12} \div \frac{16}{17}$

## Repaso

1. Marca las siguientes definiciones:
    a. Mínimo Común Denominador
    b. recíproco/a

2. Marca las cajas de "Algoritmo".

3. Escribe una pregunta que te gustaría hacerle a tu instructor, o algo nuevo que hayas aprendido en esta lección.

# Problemas de práctica

**Math On the Move Lección 6**

Instrucciones: Escribe las respuestas en la libreta de matemáticas. Titula este ejercicio Math On the Move – Lección 6, Conjuntos A y B

***Conjunto A***

1. Suma o resta las siguientes fracciones. Escribe tus respuestas en la forma más simple.

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ b) $\frac{4}{9}-\frac{3}{9}$ c) $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$ d) $\frac{11}{12}-\frac{4}{5}$

2. Encuentra el producto o cociente. Escribe tus respuestas en los términos más bajos.

a) $\frac{1}{2}\times\frac{7}{8}$ b) $\frac{9}{10}\times\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{2}\div 9$ d) $\frac{2}{5}\div\frac{10}{13}$

***Conjunto B***

1. Melissa escribió en un examen que $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{7}$. ¿Es su respuesta correcta? Explica por qué sí o por qué no usando palabras y/o ilustraciones.

2. Si puedes recoger $\frac{1}{6}$ de un galón de uvas de cada vid, ¿Cuántas vides tendrías que recoger para llenar una cubeta de medio galón? ¿y 3 cubetas de medio galón?

3. Nueve acres de tierra se dividen en terrenos de $\frac{3}{4}$ de acre para construir unas nuevas casas. ¿Cuántos terrenos habrá? ¿Qué la pasa al número de terrenos si el número de acres de tierra se dobla?

## Respuestas a Inténtalo

1. a) $\frac{2}{3}$  b) $\frac{2}{5}$  c) $\frac{1}{2}$  d) $\frac{1}{2}$

2. a) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ o $\frac{16}{48} = \frac{1}{3}$  b) $\frac{2}{9}$ o $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

3. a) $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$  b) $\frac{8}{55}$  c) $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

4. a) 40  b) $\frac{7}{6}$  c) $\frac{85}{192}$

**Fin de la lección 6**