



Habilidades Académicas y de Preparación para la Carrera

**Repaso de
Matemáticas
Elementales**

Unidad

2

National PASS Center

2013

Factores y Múltiplos

Vocabulario:

- ✓ factores
- ✓ múltiplos

Los **factores** son los números que al multiplicarlos entre sí dan por resultado otro número diferente. Veamos de cerca los factores.

Ejemplo: Un día, tú y tus amigos deciden que van a jugar basquetbol. Son 12 personas en total. ¿Cuántos equipos se pueden formar con esas personas?

Puedes visualizar este problema haciendo uso de la multiplicación.

Tú y tus amigos integran 1 grupo de 12 personas: $1 \times 12 = 12$.

Puedes formar 2 equipos de 6 personas: $2 \times 6 = 12$.

o 3 equipos de 4 personas: $3 \times 4 = 12$.

También puedes formar 4 equipos de 3, 6 equipos de 2, e incluso 12 equipos de 1.

$$4 \times 3 = 6 \times 2 = 12 \times 1 = 12$$

Los números enteros utilizados y que multiplicados entre sí dan 12 son:

1, 2, 3, 4, 6, 12

Todos ellos son factores de 12. Nota también que 12 es divisible entre todos estos números.

Lee con atención la siguiente definición.

- ✓ Cuando los números enteros, diferentes de cero, se multiplican entre sí, cada número es un **factor** del producto.

Ejemplo: 2 y 7 son factores de 14, porque $2 \times 7 = 14$. En forma similar, si un número entero se divide exactamente entre otro número, el divisor y el cociente son factores de ese número. 7 y 2 son factores de 14, porque $14 \div 7 = 2$.

En el problema del basquetbol, dos de las diferentes maneras de formar los grupos fueron

3×4 y 4×3

Cuando anotas los factores de un número, cuenta cada factor una sola vez. No se anota el mismo factor dos veces. De esta manera, el 3 y el 4 se anotan una sola vez como factores de 12.

¡Inténtalo!

Enlista todos los factores de los siguientes números:

a. 24

b. 10

c. 36

Otros dos factores de 12 son 2 y 6. Nota que 2 no tiene más factores que el 1 y el 2 mismo. Esto se debe al hecho de que el 2 se define como un número primo.

- ✓ Un número se define como **primo** si sus únicos factores son 1 y el número mismo. Por ejemplo, 5 es número primo porque los únicos números en que se divide exactamente son 1 y el 5 mismo.

El número 6 no es un número primo. Tiene más factores que el 1 y el 6 mismo. Todos los números en que el 6 se divide exactamente son

1, 2, 3, 6

El seis tiene más factores que el 1 y el mismo 6. A esto se le llama un número compuesto. El 6 es una composición de muchos factores.

- ✓ Un **número compuesto** es un número entero más grande que 1 que tiene factores además del 1 y el número mismo. Por ejemplo, 4 es un número compuesto porque tiene los factores 1, 2, y 4.

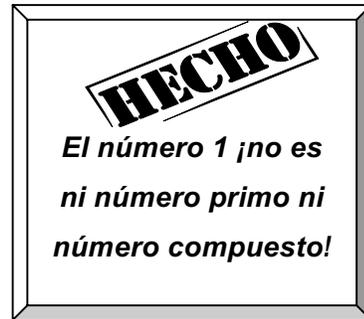
El número compuesto 6 puede ser escrito como el producto de dos de sus factores

Si

$$12 = \textcircled{6} \times 2$$

Entonces

$$\textcircled{12} = 2 \times 3 \times 2$$



2×3 es igual a 6. Puede sustituirse por 6 en la ecuación.

Puedes ver que el número 12, escrito como

$$12 = 2 \times 3 \times 2$$

tiene dos factores de 2, y uno de 3.

Escrito de esta manera, todos los factores de 12 son números primos.



Una manera de factorizar un número en números primos es utilizar un árbol de factores.

Ejemplo: Escribe 72 como el producto de sus factores primos.

Solución: Puedes resolver esto con el método del árbol de factores.

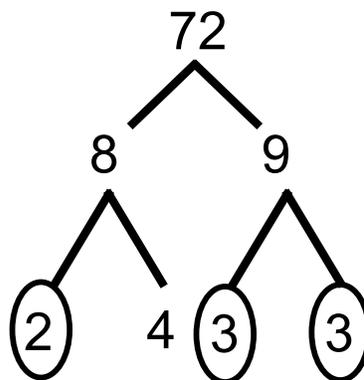
Paso 1: Escribe el número que deseas factorizar.

72

Paso 2: Dibuja dos “ramas” hacia abajo del número. Coloca dos de sus factores en el extremo de las ramas. Nunca utilices el factor 1.

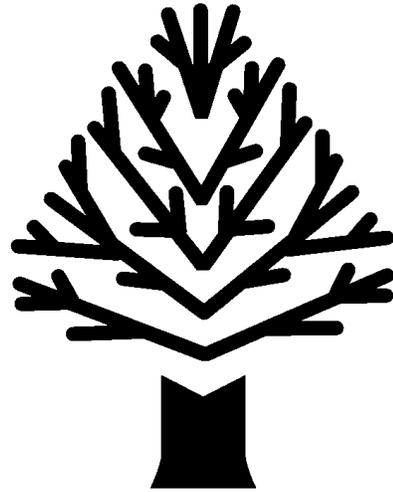
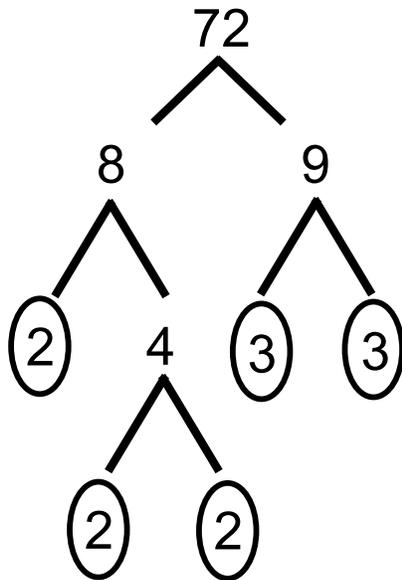


Paso 3: Continúa dibujando ramas debajo de cada factor, hasta que hayas alcanzado un número primo. Circula los factores primos cuando se presenten.



Factoriza 8 y 9, y circula los factores primos.

Ahora, factoriza el 4 y circula sus factores primos.



Ahora tu árbol de factores está completo, ¡pero aún no has terminado!

Paso 4: Escribe la respuesta como un producto de números primos. El producto final es igual a

$$72 = 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$



Regla

Para factorizar un número:

1. Escribe el número que deseas factorizar en el nivel de arriba.
2. Dibuja dos ramas bajo el número. Escribe los factores del número al final de las ramas. No utilices el 1 ni el número mismo como factores a menos que no haya otros.
3. Circula cualesquier números primos. Continúa factorizando los números compuestos hasta que todos los factores sean primos. Circúlalos.
4. Escribe el número como un producto de sus factores primos.

¡Inténtalo!

2. Factoriza cada número utilizando un árbol de factores. Luego escribe el número como un producto de factores primos.
 - a. 64
 - b. 100
 - c. 36

El método del árbol de factores es muy útil para encontrar los factores primos de un número. También lo puedes utilizar para encontrar factores que sean comunes a dos (o más) números.

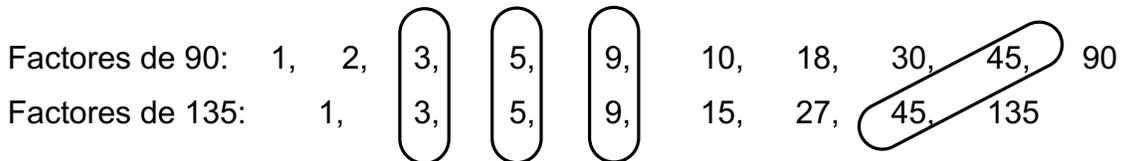
Comparación de los factores de dos (o más) números:

- ✓ Los factores que no se comparten se llaman *factores únicos*.
- ✓ Los factores que los números comparten se llaman factores comunes.
- ✓ El factor más grande que comparten dos (o más) números es su factor común más grande, o su **FCMG**. Por ejemplo, 2 es el FCMG de 4 y de 6.

Ejemplo: Encuentra el factor común más grande de 90 y de 135.

Solución: Los pasos para resolver este problema son

- enlista los factores de cada número,
- encuentra sus factores comunes, y
- determina cual factor es el más grande.

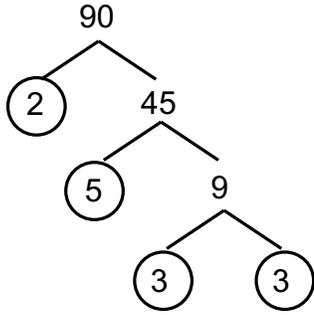


Puedes ver que 45 es el FCMG de 90 y de 135.

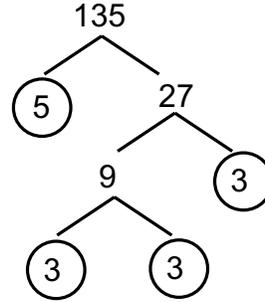
Este método tiene sus problemas. No fue eficaz para enlistar cada factor de 90 y de 135. También es fácil omitir factores, y cometer errores. Existe una forma más fácil para resolver el problema. Esta forma utiliza árboles de factores y diagramas de Venn.

eEl otro método:

Paso 1: Factoriza cada número utilizando un árbol de factores. Rescríbelo como un producto de factores primos.

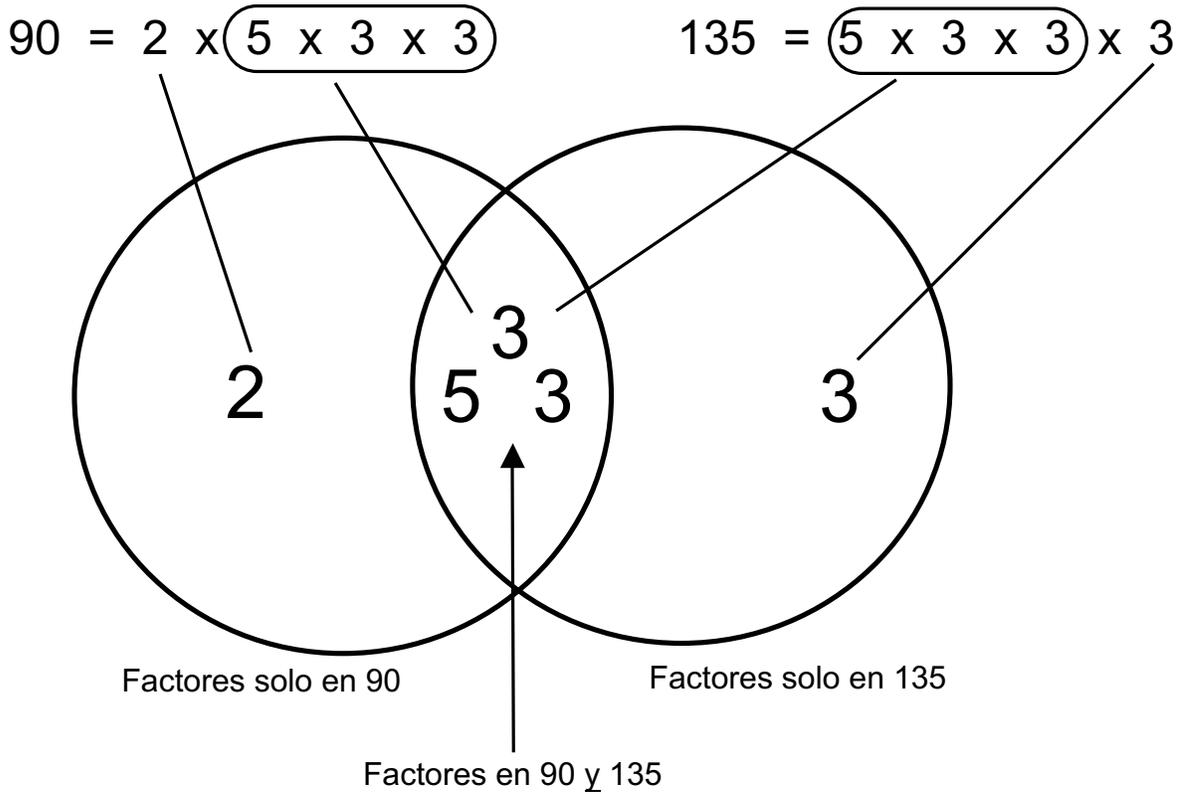


$$90 = 2 \times 5 \times 3 \times 3$$



$$135 = 5 \times 3 \times 3 \times 3$$

Paso 2: Ordena utilizando un diagrama de Venn.



Paso 3: El primer método demostró que el FCMG de 90 y de 135 es 45.

Observa los factores primos comunes de 90 y 135.

Éstos son 5, 3, y 3. Nota que $5 \times 3 \times 3 = 45$.

El método del diagrama de Venn te dio la misma respuesta que el primer método. Y, ¡es una buena forma de evitar el olvido de los factores!

Regla

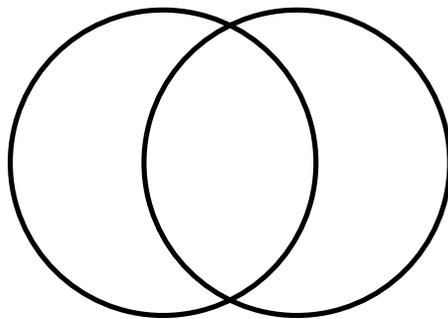
Para encontrar el factor común más grande (FCMG):

1. Factoriza cada número y reescríbelo como un producto de factores primos.
2. Organiza los factores de cada número utilizando un diagrama de Venn.
3. Multiplica entre sí todos los números de la sección central del diagrama de Venn. Este producto será el FCMG.

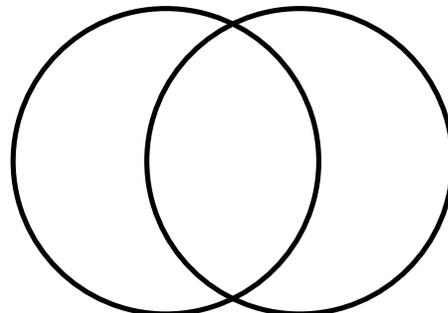
¡Inténtalo!

3. Encuentra el factor común más grande para cada par de números.

a. 72 y 108



b. 70 y 315



Múltiplos

Has invitado a tus amigos a una parrillada en tu casa. Necesitas conseguir salchichas y pan. Las salchichas vienen en paquetes de 6. Los panes para salchichas vienen en paquetes de 8. Te gustaría tener el mismo número de salchichas y panes. Necesitarás entonces comprar múltiples paquetes de salchichas y de pan hasta que tengas el mismo número de cada uno. ¿Cómo puedes averiguar cuántos paquetes de salchichas y cuántos paquetes de pan para salchichas debes comprar?

Este es un problema de multiplicación. El número de salchichas que compras será igual al número de paquetes multiplicado por 6 salchichas en cada uno.

El número de salchichas que podrías comprar es

$$6 \text{ salchichas} \times 1 \text{ paquete} = 6$$

$$6 \text{ salchichas} \times 2 \text{ paquetes} = 12$$

$$6 \text{ salchichas} \times 3 \text{ paquetes} = 18$$

$$6 \text{ salchichas} \times 4 \text{ paquetes} = 24$$

$$6 \text{ salchichas} \times 5 \text{ paquetes} = 30$$

$$6 \text{ salchichas} \times 6 \text{ paquetes} = 36$$

El número de panes para salchichas que podrías comprar es

$$8 \text{ panes} \times 1 \text{ paquete} = 8$$

$$8 \text{ panes} \times 2 \text{ paquetes} = 16$$

$$8 \text{ panes} \times 3 \text{ paquetes} = 24$$

$$8 \text{ panes} \times 4 \text{ paquetes} = 32$$

$$8 \text{ panes} \times 5 \text{ paquetes} = 40$$

$$8 \text{ panes} \times 6 \text{ paquetes} = 48$$

Las salchichas vienen en múltiplos de 6, y los panes vienen en múltiplos de 8.

- ✓ Un **múltiplo** de un número es el producto de ese número y cualquier número entero diferente de cero. Por ejemplo, 20 es múltiplo de 4. ($4 \times 5 = 20$)

Como puedes ver, 6 y 8 tienen algunos múltiplos en común.

Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48.
 Múltiplos de 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64...

Puedes ver que tanto el 6 como el 8 tienen los múltiplos 24 y 48. Estos se llaman múltiplos comunes. Volviendo a la parrillada, múltiplos comunes significa que tendrás la misma cantidad de salchichas que de panes. El múltiplo más pequeño que comparten estos números es el menor múltiplo común.

- ✓ El múltiplo más pequeño que comparten dos números se llama el menor múltiplo común, o **MMC**.

El menor número de salchichas y panes para salchichas que debes conseguir es 24. Si compras cuatro paquetes de salchichas y 3 paquetes de panes para salchichas, tendrás 24 de cada uno.

$$4 \times 6 = 3 \times 8 = 24$$

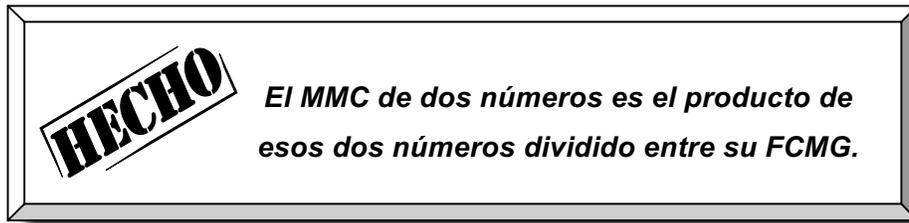
Ejemplo: Encuentra el MMC de 12 y 20.

Solución: Enlista los múltiplos de cada número.

Múltiplos de 12 son: 12, 24, 48, 60, 72, ...

Múltiplos de 20 son: 20, 40, 60, 80, 100, ...

El menor múltiplo común es 60.



Verifica si la máxima anterior funciona.

Factores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12
Factores de 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20

4 es el FCMG. $12 \times 20 = 240$
 $240 \div 4 = 60$

¡Funciona! Puedes utilizar este hecho para verificar tu respuesta cuando encuentres el MMC de dos números.

¡Inténtalo!

4. Encuentra el menor múltiplo común para cada par de números.
 - a. 8 y 16

 - b. 24 y 84

 - c. 13 y 17

NOTAS o preguntas que desees hacer:

☞ **Fin de la Lección 4** ☞